Секция «Геометрия и топология»

Гамильтоновы системы на двумерных симплектических многообразиях с особенностями общего положения

Научный руководитель – Фоменко Анатолий Тимофеевич

Сидельников Владислав Игоревич
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: vlad_sidelnikov73@mail.ru

Вырожденные особенности дифференциальных форм впервые были исследованы в работе Ж. Мартине [1]. В частности, описан случай общего положения для замкнутых 2-форм. Пусть на многообразии M задана 2-форма ω, обозначим $\mathcal{Z}_\rho = \mathrm{Ker}(\omega_\rho)$ ее ядро в точке $\rho \in M$, а $\Theta = \{\rho \in M | \mathcal{Z}_\rho \neq 0\}$ множество ее вырождений. Для замкнутых 2-форм вырожденная особенность общего положения в точке ρ характеризуется тем, что

$$\dim \mathcal{Z}_\rho = 2 \quad \mathcal{Z}_\rho \not\subset T_\rho\Theta \quad \mathrm{d}^2_\rho(\det \omega(\mathbf{x})) \neq 0,$$

где Θ - гладкая гиперповерхность в M и $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ - произвольные локальные координаты. В этом случае справедлив критерий гладкого продолжения поля $\mathrm{sgrad}\, f$ впервые сформулированный С. Пневматикосом [2] для 2-форм некоторого естественного вида, явно заданных в координатах: $\forall y \in \Theta \cup O(\rho)$ $\mathrm{d}f(\mathcal{Z}_y) = 0$, где $O(\rho)$ – достаточно малая окрестность ρ; аналог теоремы Дарбу [1]: в окрестности точки $\rho \in \Theta$ существуют координаты $(x_1, x_2, \mathbf{p}, \mathbf{q})$, в которых

$$\omega = x_1 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q_i.$$

В работах Д.Б. Зотьева была построена теория контактных особенностей замкнутых 2-форм [3, определение 1] с ядром любой размерности, которые в случае двумерного ядра являются особенностями общего положения. Контактные особенности характеризуются тем, что

$$\dim \mathcal{Z}_\rho = 2k \quad \mathcal{Z}_\rho \not\subset T_\rho S \quad \mathrm{d}^{2k-1}\,\mathrm{Pf}(\omega)_\rho \neq 0,$$

где S такая гладкая гиперповерхность в M, что $\rho \in S \subset \Theta$ и $\dim \mathcal{Z}_y = 2k$ в каждой точке $y \in S$. Вблизи контактной точки $\rho \in \Theta$ справедлив критерий гладкого продолжения поля $\mathrm{sgrad}\, f$ [3, теорема 1], а 2-форма принимает следующий вид

$$\omega = \mathrm{d}\Big(\frac{x_1^2}{2}\Big(\mathrm{d}y_1 + \sum_{j=2}^{k} x_j \mathrm{d}y_j\Big)\Big) + \sum_{i=k+1}^{n} \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}y_i,$$

где $\dim \mathcal{Z}_\rho = 2k$, для некоторых координат $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ [3, теорема 3].

В случае двумерного многообразия M эти типы особенностей совпадают. Данный доклад посвящен гамильтоновым системам на двумерных замкнутых симплектических многообразиях с особенностями общего положения. Основываясь на совместной работе [4] А.Ю. Коняева, Е.А. Кудрявцевой и докладчика, введено понятие двумерного замкнутого шахматного многообразия [4, определение 1] и пояснено, как с его помощью можно классифицировать двумерные замкнутые симплектические многообразия с особенностями общего положения [4, теорема 1,2]. Доказана теорема о топологической классификации слоений

Лиувилля гамильтоновых систем на шахматных многообразиях, утверждающая, что две гамильтоновы системы на двумерных замкнутых шахматных многообразиях лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их молекулы Фоменко с метками-звездочками изоморфны (см. [4, определение 4, теорема 3], [5, определение 2.21]).

Введено понятие сложности гамильтоновой системы на шахматном многообразии, и по аналогии с [5, теорема 2.17] с точностью до лиувиллевой эквивалентности классифицированы гамильтоновы системы малой сложности (не больше 6) на сфере и торе, перечислены соответствующие молекулы; представлены результаты по классификации таких систем на кренделе.

Источники и литература

1) Martinet J., "Sur les singularités des formes différentielles" , Annales de l'institut Fourier. 1970. **20**, N 1. 95–178.
2) S. N. Pnevmatikos, "Structures hamiltoniennes en presence de contraintes" , C. R. Acad. Sci. Paris. S´er. A, 289:16 (1979), 799–802.
3) Зотьев Д.Б., "Контактные вырождения замкнутых 2-форм" , Матем. сб. 2007. **198**, №4. 47–78.
4) Коняев А.Ю., Кудрявцева Е.А., Сидельников В.И., "Геометрия и топология двумерных симплектических многообразий с особенностями общего положения и гамильтоновых систем на них" , Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 1, Математика. Механика., в печати.
5) Болсинов А.В., Фоменко А.Т., Интегрируемые гамильтоновы системы. Топология. Геометрия. Классификация. Ижевск: Удмуртский университет, 1999.