Секция «Геометрия и топология»

Трехмерные алгебры Ли, допускающие полупростые алгебраические операторы Нейенхейса

Научный руководитель – Ошемков Андрей Александрович

Жихарева Екатерина Сергеевна

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия

E-mail: ekaterina.zhikhareva@math.msu.ru

Известно, что классификация левоинвариантных операторов Нейенхейса на группах Ли сводится (в случае, когда все собственные значения вещественны и просты) к описанию базисов в алгебрах Ли, обладающих тем свойством, что любые два базисных вектора порождают двумерную подалгебру.

Эта задача еще недостаточно изучена. В моей работе, был сделан первый важный шаг в решении проблемы классификации левоинвариантных операторов Нейенхейса, а именно в размерности три. Также получен результат для размерности четыре.

- **Постановка задачи:** Опишите все алгебры Ли G^n, которые в некотором базисе $\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_n$ удовлетворяют следующему условию: $[\mathsf{e}_i, \mathsf{e}_j] = \alpha_{ij}\mathsf{e}_i + \beta_{ij}\mathsf{e}_j$ для всех $i, j \in \overline{1, n}$, где $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbf{R}$.
- **Результат:** Получено полное описание базисов с указанным свойством для трехмерных алгебр Ли. Как оказалось, такие базисы существуют для большинства из них.

Заметим, что соответствующие левоинвариантные операторы Нейенхейса в соответствующей группе Ли G задаются диагональными матрицами относительно базиса $\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_n$ с постоянными элементами на диагонали, где каждый вектор e_i рассматривается как левоинвариантное векторное поле на G. Также для некоторых алгебр, обладающих нашим свойством, найден ответ на очень важный вопрос - а сколько именно существует таких базисов?

Источники и литература

1) A. Nijenhuis, X_n-forming sets of eigenvectors, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 54: Indag. Math. 13 (1951), 200212.
2) A. Yu. Konyaev, “Completeness of commutative Sokolov-Odesskii subalgebras and Nijenhuis operators on gl(n)”, Sb. Math., 211:4 (2020), 583–593
3) A.V. Odesskii, V.V. Sokolov, “Integrable matrix equations related to pairs of compatible associative algebras”, J. Phys. A 39:40 (2006), 12447–12456.
4) A. Panasyuk, “Algebraic Nijenhuis operators and Kronecker Poisson pencils”, Differential Geom. Appl. 24:5 (2006), 482–491.
5) A.Panasyuk, A.Szereszewski, "Webs, Nijenhuis operators, and heavenly PDEs Classical and Quantum Gravity, 40:23 (2023) 235003
6) Y. Kosmann-Schwarzbach, F. Magri, Poisson-Nijenhuis structures. Ann. Inst. Henri Poincare, 53 (1990), 35–81

7) B. A. Dubrovin , A. T. Fomenko , S. P. Novikov, Modern Geometry - Methods and Applications. Part I. The Geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields, 1984, ISSN 0072-5285