Секция «Геометрия и топология»

Разделяющее множество пространства параметров псевдоевклидовой осесимметричной системы Жуковского

Научный руководитель – Фоменко Анатолий Тимофеевич

Агуреева Екатерина Сергеевна
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: katekat2003@mail.ru

Топологический подход к интегрируемым системам был развит в работах А.Т.Фоменко и его научной школы [1], найдя применение к широкому классу систем из геометрии и механики. Построенные классифицирующие топологические инварианты Фоменко–Цишанга определены для систем с компактными слоями и невырожденными особенностями.

В последние годы большой интерес вызывает исследование явления некомпактности слоений Лиувилля в интегрируемых системах, см. обзор [2] А.Т.Фоменко и Д.А.Федосеева. Новый класс систем, содержащий такие слоения с некомактными некритическими бифуркациями был введен в работе А.В.Борисова и И.С.Мамаева [3]. Там была предложена замена в пространстве с координатами $J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3$

$$J_1 = \frac{J_1}{i}, \quad J_2 = \frac{J_2}{i}, \quad J_3 = J_3, \quad x_1 = \frac{x_1}{i}, \quad x_2 = \frac{x_2}{i}, \quad x_3 = x_3.$$

После преобразования многим известным интегрируемым системам с вещественными первыми интегралами соответстствуют интегрируемые системы, чьи первые интегралы также вещественны. Их часто называют "псевдоевклидовыми" аналогами исходных систем.

Доклад посвящен изучению аналога системы Жуковского, четырьмя первыми интегралами которого являются функции Казимира $f_1 = a, f_2 = b$, гамильтониан $H = h$ и функция $K = k$ — дополнительный интеграл псевдоевклидова аналога волчка Эйлера.

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = a, \qquad f_2 = x_1 J_1 + x_2 J_2 - x_3 J_3 = b,$$

$$H = \frac{(J_1 - \lambda_1)^2}{2A_1} + \frac{(J_2 - \lambda_2)^2}{2A_2} - \frac{(J_3 - \lambda_3)^2}{2A_3} = h, \qquad K = J_1^2 + J_2^2 - J_3^2 = k.$$

Система Жуковского обобщает волчок Эйлера (движение тяжелого твердого тела, закрепленного в центре масс) путем добавления постоянного гиростатического момента $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Параметрами задачи являются главные моменты инерции тела A_i и компоненты λ_i вектора $\vec{\lambda}$.

В случае осесимметричной системы, $A_1 = A_2 \neq A_3$, в работе автора и В.А.Кибкало [4] были описаны бифуркационные диаграммы и указано, каким дугам бифуркационных кривых соответствуют те или иные бифуркации слоения Лиувилля. Последние описаны как прямые произведения двумерной расслоенной базы на одномерный слой. Обнаружены невырожденные (боттовские) особенности и некомпактные некритические бифуркации.

Образ множества критических точек функции H на обобщенных гиперболоидах $K = k$ в $\mathbb{R}^3(\vec{J})$ составляет параметрическую кривую $(k(t), h(t))$ для $t \in (\mathbb{R} \backslash \{A_1^{-1}, A_3^{-1}\}) \cup \{\infty\}$:

$$h(t) = \frac{t^2}{2}\left(\frac{A_1\lambda_1^2}{(1+A_1t)^2} + \frac{A_2\lambda_2^2}{(1+A_2t)^2} - \frac{A_3\lambda_3^2}{(1+A_3t)^2}\right), \quad k(t) = \frac{A_1^2\lambda_1^2}{(1+A_1t)^2} + \frac{A_2^2\lambda_2^2}{(1+A_2t)^2} - \frac{A_3^2\lambda_3^2}{(1+A_3t)^2}.$$

Кривая $(k(t), h(t))$ имеет две непрерывные ветви на $t \in S^1$, разделенные значениями $t = -\frac{1}{A_1}$ и $t = -\frac{1}{A_3}$, точку возврата и касается каждой из осей Oh и Ok по одному разу.

Расположение бифуркационных кривых на плоскости Okh существенно зависит параметров системы $A_1, A_3, \lambda_1, \lambda_3$. *Разделяющим множеством* системы назовем набор значений параметров, разбивающих их пространство на области, точкам которых соответствуют системы с фиксированным порядком особых точек на кривой $(k(t), h(t))$ и фиксированными знаками h и k в точках касания осей Oh и Ok.

Удалось найти существенные параметры системы: $\alpha = (A_3/A_1)^{1/3}$, $\beta = (\lambda_3/\lambda)^{2/3}$. Иначе говоря, разделяющее множество в исходном пространстве удалось описать как прообраз некоторого набора кривых плоскости $O\alpha\beta$,

Теорема *Разделяющее множество пространства параметров $A_1 > 0$, $A_3 > 0$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_3 > 0$ псевдоевклидовой осесимметричной системы Жуковского состоит из прообраза кривых из $\mathbb{R}^2(\alpha, \beta):\ \alpha = 1,\ \beta = 1,\ \beta = \alpha^2,\ \beta = 1/\alpha$. Они разбивают квадрант $\alpha > 0, \beta > 0$ на области I-VIII. На рис. 1 для них указан вид кривой $(k(t), h(t))$ с типами 2-атомов слоения на $\mathbb{R}^3(J_1, J_2, J_3)$ функций K, H.*

На рисунке также отмечены фиолетовым цветом кривые $\alpha = \frac{\beta^2+2\sqrt{\beta}}{2\beta^{3/2}+1}$, $\alpha = \frac{2\sqrt{\beta}-\beta^2}{2\beta^{3/2}-1}$, которым соответствует равенство координат h точек возврата и пересечения бифуркационной кривой с осью Oh. Дело в том, что бифуркационная диаграмма исходной системы Жуковского состоит не только из сегментов параметрической кривой $(k(t), h(t))$, но и из прямых $k = b^2/a$ (в случае $a \cdot b \neq 0$) и $k = 0$. Потому точки пересечения и точка касания параметрической кривой с осью Ok бывают особыми точками бифуркационной диаграммы. Изучение порядка особых точек в проекции на ось Oh или Ok является важным шагом на пути топологического описания слоений Лиувилля системы в неособых зонах ее энергии или интеграла.

Благодарности. Работа поддержана грантом Российского научного фонда (проект 22-71-00111) в МГУ имени М.В.Ломоносова. Автор является стипендиатом Фонда “Базис”.

Источники и литература

1) А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко, “Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация”, Изд. дом "Удмуртский университет Ижевск, 1999.
2) Д.А. Федосеев, А.Т. Фоменко, “Некомпактные особенности интегрируемых динамических систем” // Фундамент. и прикл. матем., **21**:6 (2016), 217–243.
3) A. V. Borisov, I. S. Mamaev, “Rigid Body Dynamics in Non-Euclidean Spaces”, Russ. J. Math. Phys., 23:4 (2016), 431–454.
4) Е.С. Агуреева, В.А. Кибкало, “Топологический анализ осесимметричной системы Жуковского в случае алгебры Ли $e(2,1)$” // Вестник МГУ. Матем. Механ., (2024), в печати.

Иллюстрации

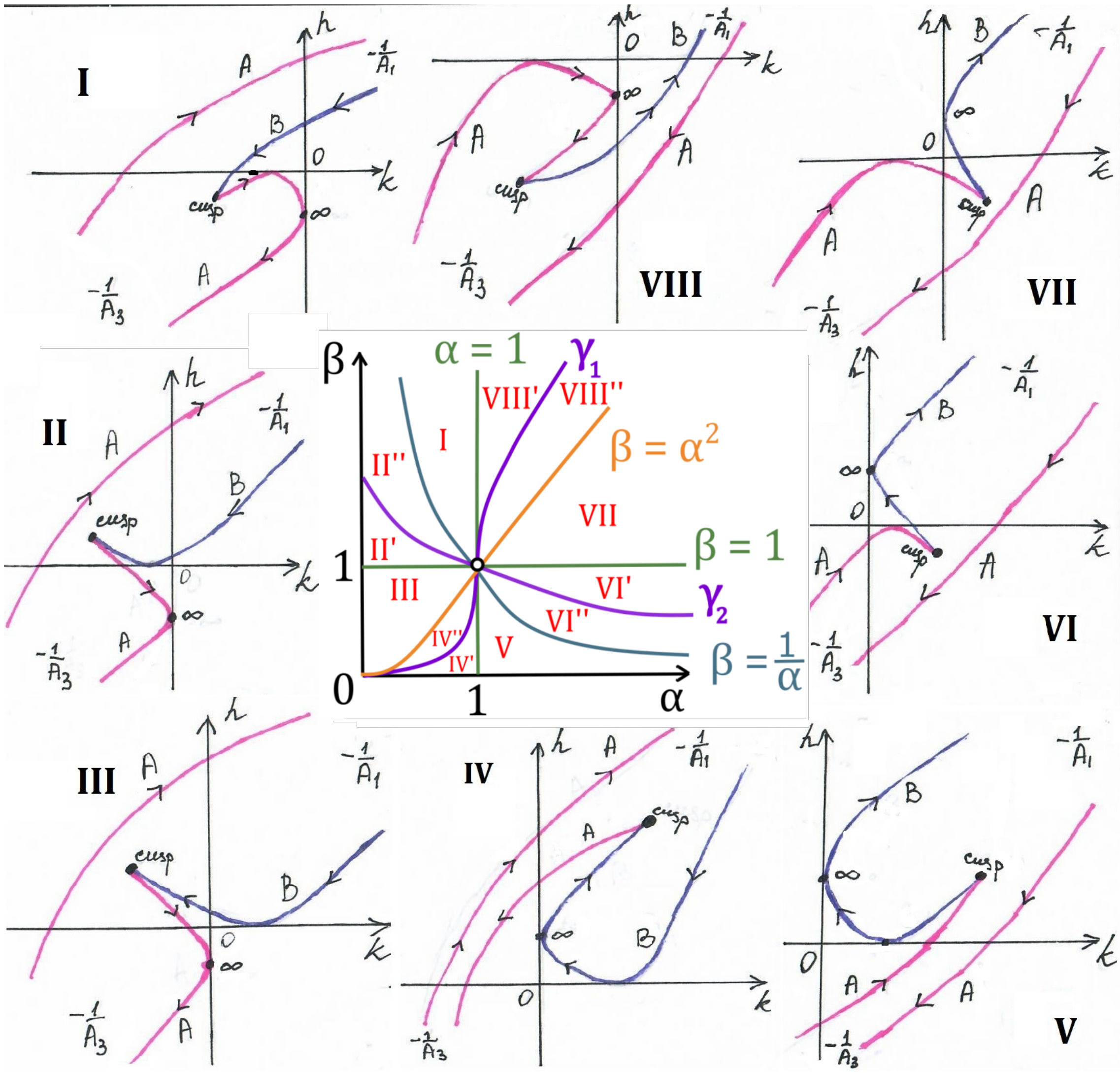

Рис. : Разделяющее множество на плоскости $O\alpha\beta$ и отвечающий системам из областей I-VIII вид кривой $(k(t), h(t))$ на плоскости Okh с типами 2-атомов, отвечающих ее дугам.