Секция «Геометрия и топология»

Классификация особенностей коранга 1 интегрируемых систем

Научный руководитель – Кудрявцева Елена Александровна

Онуфриенко Мария Викторовна

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия

E-mail: mary.onufrienko@gmail.com

Мы изучаем гладкие функции двух переменных, инвариантные относительно действия конечной группы G поворотами. Получена классификация критических точек, возникающих в типичных параметрических семействах G-инвариантных гладких функций с числом параметров, не превосходящим двух. Получены критерии для приводимости гладкой G-инвариантной функции, а также гладкого параметрического семейства G-инвариантных функций к нормальным формам вблизи критической точки. Критерии даны в терминах частных производных функции в точке. В качестве приложения получена классификация особенностей коранга 1 «типичных» интегрируемых систем с 2 и 3 степенями свободы. Построены локальные бифуркационные диаграммы и фазовые портреты систем.

Перейдем к точным формулировкам. Зафиксируем натуральное число s и рассмотрим циклическую группу $G \subset SO(2)$ порядка s, состоящую из поворотов $z \mapsto e^{2\pi \ell i/s} z$ плоскости $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, где $z = x+iy \in \mathbb{C}$, $0 \le \ell < s$. Можно показать, что любая гладкая G-инвариантная функция $f(x,y)$ имеет ряд Тейлора в точке $(0,0)$ вида

$$\operatorname{Re}\sum_{p,q\geq 0} c_{pq}|z|^{2p} z^{qs}, \quad \text{где} \quad c_{p,0} = \frac{1}{p!^2} f^{(2p)}_{z^p\bar z^p}(0,0), \quad c_{p,q} = \frac{2}{(p+sq)!p!} f^{(2p+sq)}_{z^{p+sq}\bar z^p}(0,0),\ q>0. \qquad (1)$$

Определение ([1]). *Пусть $f = f(x,y)$ — гладкая G-инвариантная функция, где $|G| = s \geq 2$. Будем говорить, что функция f имеет G-*регулярную особенность *в точке $(0,0)$, если $f^{(2)}_{z\bar z}(0,0) \neq 0$ или $f^{(s)}_{z^s}(0,0) \neq 0$ (т.е. $c_{10} \neq 0$ или $c_{01} \neq 0$). Любой G-регулярной особенности сопоставим число $k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$, называемое ее типом, такое, что коэффициенты ряда Тейлора (1) удовлетворяют следующей системе k уравнений и одному неравенству:*

(i) *при $k < s/2-1$ выполнено $f^{(2j)}_{z^j\bar z^j}(0,0) = 0$, $1 \le j \le k$, и $f^{(2k+2)}_{z^{k+1}\bar z^{k+1}}(0,0) \neq 0$;*

(ii) *если $k > s/2-1$ и s нечетно, то $k = (s-1)/2$ и $f^{(2j)}_{z^j\bar z^j}(0,0) = 0$, $1 \le j \le k$;*

(iii) *если $k = s/2-1$, то $f^{(2j)}_{z^j\bar z^j}(0,0) = 0$, $1 \le j < s/2$, и $f^{(s)}_{z^{s/2}\bar z^{s/2}}(0,0)^2 \neq 4\frac{(s/2)!^4}{s!^2}|f^{(s)}_{z^s}(0,0)|^2$;*

(iv) *если $k \geq s/2$ и s четно, то многочлен Тейлора степени s функции $f(x,y) - f(0,0)$ является однородным многочленом степени s и является полным квадратом, т.е. имеет вид $P_s(x,y) = \operatorname{Re}(c_{0,1}z^s) + c_{s/2,0}|z|^s$, где $c_{s/2,0} = \pm|c_{0,1}|$, а многочлен Тейлора степени $2(k+1)$, после (несложного) приведения к виду $P_s(\tilde x,\tilde y) + \sum_{j=s/2+1}^{k+1} \tilde c_{j,0}|\tilde z|^{2j}$ с помощью замены переменных, удовлетворяет условию $\tilde c_{s/2+1,0} = \ldots = \tilde c_{k,0} = 0$ и $\tilde c_{k+1,0} \neq 0$.*

Следствие ([1]). *Пусть $f = f(x,y)$ — гладкая G-инвариантная функция, где $|G| = s \geq 3$. Тогда f не имеет в нуле G-регулярной особенности никакого из типов $k \in \{0,1,2\}$ тогда и только тогда, когда f является решением хотя бы одной из следующих систем:*

- *система трех уравнений $f^{(2)}_{z\bar z}(0,0) = 0$, $\operatorname{Re} f^{(s)}_{z^s}(0,0) = 0$, $\operatorname{Im} f^{(s)}_{z^s}(0,0) = 0$ при $s \geqslant 3$,*
- *система трех ур-ий $f^{(2)}_{z\bar z}(0,0) = 0$, $3f^{(4)}_{z^2\bar z^2}(0,0) = \pm|f^{(s)}_{z^4}(0,0)|$, $f^{(6)}_{\bar z^3\bar z^3}(0,0) = 0$ при $s = 4$,*
- *система трех ур-ий $f^{(2)}_{z\bar z}(0,0) = f^{(4)}_{z^2\bar z^2}(0,0) = 0$, $10 f^{(6)}_{z^3\bar z^3}(0,0) = \pm|f^{(s)}_{z^6}(0,0)|$ при $s = 6$,*

- *система трех уравнений* $f^{(2)}_{z\bar z}(0,0)=0$, $f^{(4)}_{z^2\bar z^2}(0,0)=0$, $f^{(6)}_{z^3\bar z^3}(0,0)=0$ *в случае* $s \geqslant 7$.

В качестве примера G-регулярной особенности любого типа k рассмотрим функцию

$$f_{s,k,a}(x,y)=\sum_{i=1}^{m} a_i|z|^{2(k+i)}+\begin{cases} \pm|z|^2, & s>2,\ k=0 \text{ (случай i)},\\ \pm x^2 \pm y^2, & s=2,\ k=0 \text{ (случай iii)},\\ \mathrm{Re}(z^s), & 0<k<s/2 \text{ (случаи i—iii)},\\ \mathrm{Re}(z^s)\pm|z|^s, & \text{четное } s>2,\ k\geq s/2 \text{ (случай iv)},\\ \mathrm{Re}(z^2)\pm|z|^2\pm|z|^{2(k+1)}, & s=2, k\geq 1 \text{ (случай iv)}, \end{cases}$$

где $a=(a_i)\in\mathbb{R}^m$ — параметры (*«модули»*), $m=\min(k,[s/2]-1)$ — *модальность*, $a_1\neq 0$ при $k\neq[\frac{s-1}{2}]$, $a_1\neq\pm1$ при $k=s/2-1$, $k<s/2$ при нечетном s. Рассмотрим $(m+k)$-параметрическое семейство G-инвариантных функций вблизи начала координат:

$$F_{s,k,a}(\mathbf{z},\nu)=f_{s,k,a}(\mathbf{z})+\sum_{j=1}^{k}\nu_j|z|^{2j},$$

где $\mathbf{z}=(x,y)$ — переменные, $\nu=(\nu_j)\in\mathbb{R}^k$ — «малые» параметры, $z=x+iy$.

Теорема 1 ([1])**.** (A) *Пусть* $G\subset SO(2)$ *— конечная группа порядка* $s\geq 2$*. Гладкая* G*-инвариантная функция* $f=f(x,y)$ *имеет в нуле* G*-регулярную особенность типа* k *тогда и только тогда, когда* $\exists$ *гладкая* G*-эквивариантная замена* $\mathbf{w}=\mathbf{w}(\mathbf{z})$, $\det\frac{\partial\mathbf{w}(0,0)}{\partial\mathbf{z}}\neq 0$, *приводящая функцию* $f(\mathbf{z})$ *к нормальной форме* $f(\mathbf{z})=f_{s,k,a}(\mathbf{w}(\mathbf{z}))+\mathrm{const}$ *для некоторого* $a=(a_1,\dots,a_m)\in\mathbb{R}^m$*. Более того,* G*-кратность Милнора,* G*-модальность и* G*-коразмерность ростка* f *в нуле равны* $\mu=m+k+1$, m *и* k*, соответственно.*

(B) *Пусть* $F=F(x,y,\lambda)$ *— параметрическое семейство* G*-инвариантных функций с параметрами* $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_l)$ *такое, что* $F(x,y,0)=f(x,y)$ *— функция из (A). Тогда в некоторой окрестности нуля в* $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^l$ *существует гладкое семейство* G*-эквивариантных замен* $\mathbf{w}(\mathbf{z},\lambda)$, $\det\frac{\partial\mathbf{w}(0,0,0)}{\partial\mathbf{z}}\neq 0$*, которое приводит* F *к нормальной форме* $F_{s,k,a}(\mathbf{w},\nu)$*, т.е.*

$$F(\mathbf{z},\lambda)=F_{s,k,a(\lambda)}(\mathbf{w}(\mathbf{z},\lambda),\nu(\lambda))+\nu_0(\lambda) \tag{2}$$

для некоторых функций $a_i(\lambda)$ *и* $\nu_j(\lambda)$ $(1\leq i\leq m,\ 0\leq j\leq k)$*, где* $\nu_j(0)=0$ *при* $j>0$*.*

Таким образом, типичные параметрические семейства гладких G-инвариантных функций с не более чем двумя параметрами приводятся к виду (2), где $k\in\{0,1,2\}$.

Определим *стандартную интегрируемую систему* на симплектическом многообразии

$$M_{st}=(D^2\times D^{n-1}\times T^{n-1})/G,\quad \omega_{st}=dx\wedge dy+\sum_{i=1}^{n-1}dI_i\wedge d\varphi_i,$$

заданную инволютивным набором функций $I=(I_1,\dots,I_{n-1})$ и G-инвариантной функцией Гамильтона $H=F_{s,k,a(I)}(\mathbf{z},I)$, $k=0,1,2$, где действие образующей группы G на указанном прямом произведении имеет вид $(x,y,I,\varphi)\mapsto(x\cos(2\pi\ell/s)-y\sin(2\pi\ell/s), x\sin(2\pi\ell/s)+y\cos(2\pi\ell/s), I, \varphi_1+2\pi/s,\varphi_2,\dots,\varphi_{n-1})$, $0<\ell<s$, $(\ell,s)=1$.

Теорема 2. *Пусть* $n=\frac{1}{2}\dim M\in\{2,3\}$*. Тогда класс интегрируемых систем на* M*, все полулокальные особенности которых послойно диффеоморфны стандартным, открыт и плотен в классе аналитических интегрируемых систем на* M *относительно* C^∞*-топологии.*

Автор благодарен Е.А.Кудрявцевой за постановку задачи и ценные обсуждения. Автор является стипендиатом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

Источники и литература

1) Kudryavtseva E.A., Onufrienko M.V. Classification of singularities of smooth functions with a finite cyclic symmetry group // Russian Journal of Mathematical Physics. 2023. V. 30. No. 1. P. 76–94.