Секция «Дискретная математика и математическая кибернетика»

Валидация поведения передатчика в канале частичного стирания в случае отсутствия абсолютно различимых символов

Научный руководитель – Галатенко Алексей Владимирович

Казаков Илья Борисович

Сотрудник

Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова, Москва, Россия

E-mail: i_ b_ kazakov@mail.ru

В данном докладе представлен алгоритм, который по формальному описанию передатчика в канале частичного стирания проверяет отсутствие аномалий 2-ого рода для функции, представляющей данное поведение.

В работе [1] представлен алгоритм проверки принадлежности функции к определенному в работе [2] классу правильных функций. В этой же работе [1] также установлен критерий правильности: функция поведения Алисы является правильной тогда и только тогда, когда всякая её аномалия 2-ого рода является также и аномалий 1-ого рода. Особый интерес представляет собой частный случай, в котором в структуре частичного стирания не имеется абсолютно различимых символов, и, следовательно, у функции поведения не имеется аномалий 1-ого рода. В этом случае для проверки принадлежности функции поведения к классу правильных необходимо и достаточно проверить отсутствие аномалий 2-ого рода. Таким образом, в данном докладе представлен процедура проверки правильности функции поведения передатчика в указанном частном случае.

Структура частичного стирания - это тройка, состоящая из алфавита A, семейства определённых на данном алфавите разбиений и набора вероятностей, приписанных разбиениям. Канал частичного стирания функционирует следующим образом: Алиса отправляет Бобу символ $a \in A$, а Боб получает только лишь часть информации: какое было выбрано разбиение и какому классу выбранного разбиения принадлежал отправленный символ. Полагаем также, что у Алисы имеется входная лента, с которой она читает символы некоторого конечного алфавита S. У Боба, в свою очередь, имеется выходная лента, на которую он может печатать символы алфавита S, а также специально зарезервированный (не входящий в S) символ стирания «*». Два символа $a_1, a_2 \in A$ абсолютно различимы в структуре частичного стирания, если ней не найдётся разбиения такого, что a_1, a_2 принадлежат одному классу данного разбиения.

Поведение Алисы может быть описано как функция $F : S^* \to A^*$, где S^*, A^* — множества слов алфавитов S, A соответственно. Представим содержательную интерпретацию. Пусть Алиса только что прочитала с входной ленты очередной символ $s \in S$, предварительно уже считав слово $\hat{s} = s_1 \dots s_m$. Тогда считаем, что на протяжениипоследующих $|F(\hat{s}s)|$ тактов Алиса посимвольно отправляет по канау частичного стирания слово $F(\hat{s}s)$

Функция поведения Алисы F однозначно определеляет детерминированую функцию $\hat{F}$ следующим образом: $\hat{F}(\hat{s}) = \hat{F}(s_1 \dots s_m) = F(\Lambda)F(s_1)F(s_1s_2)\dots F(s_1 \dots s_m)$. В свою очередь, функция $\hat{F}$ представима в виде автомата, у которого S является входным алфавитом, а множество слов A^* — выходным: на каждом шаге автомат принимает символ $s \in S$ и выдает слово $\alpha \in A$. Множество его состояний обозначим как Q. Автомат имеет функцию переходов $\phi : Q \times S \to Q$ и выходную функцию $\psi : Q \times S \to A^*$, а также начальное состояние, обозначаемое как q_Λ. Этот автомат представим также виде ориентированного графа, вершины которого соответствуют элементам множества состояний Q, и каждое ребро которого имеет две надписи: символ алфавита $s \in S$ и слово $\alpha \in A^*$. Из каждой вершины, таким образом, исходят $|S|$ ребер, каждое из которых надписано соответствующим символом $s \in S$ и словом $\psi(q,s) \in A^*$. Граф имеет выделенную инициальную вершину q_Λ. Построенный граф называется автоматным графом функции поведения Алисы F и является входными данными для алгоритма, представляемого в докладе.

Упомянем также, что пара слов $(\hat{s}_1, \hat{s}_2) \in (S^*)^2$ называется одноходовой аномалией 2-ого рода, если выполнено $|\hat{s}_1| = |\hat{s}_2| + 1$ и $|\hat{F}(\hat{s}_1)| \leq |\hat{F}(\hat{s}_2)|$.

Проверка на отсутствие аномалий 2-ого рода осуществляется в два этапа. На первом этапе, по заданному в качестве входных даннных автоматному графу строится автомат-квадратный граф.

Автомат-квадратным графом для функции F называется ориентированный граф, вершины, ребра, буквенные и числовые подписи которого определены следующим образом:

1) Имеется $|Q|^2 + 1$ вершин: $|Q|^2$ вершин, соответствующих элементам множества Q^2 и одна дополнительная вершина, далее называемая инициальной.
2) Из каждой неинициальной вершины $(q_1, q_2) \in Q^2$ выходит $|S|^2$ ребер, каждое из которых подписано соответствующей буквенной меткой $(s_1, s_2) \in S^2$. Из инициальной вершины выходит $|S|$ ребер, каждое из которых подписано соответствующей буквенной меткой $(s, *)$, где $s \in S$.
3) Ребро, выходящее из вершины $(q_1, q_2) \in Q^2$ и имеющее буквенную подпись $(s_1, s_2) \in S^2$, ведет в вершину $(q'_1, q'_2) \in Q^2$, где $q'_1 = \phi(q_1, s_1), q'_2 = \phi(q_2, s_2)$, и подписано также числовым значением, равным $|\psi(q_1, s_1)| - |\psi(q_2, s_2)|$. Ребро, выходящее из инициальной вершины и имеющее буквенную подпись (s, Λ), ведёт в вершину $(\phi(q_\Lambda, s), q_\Lambda)$, и подписано также числовым значением, равным $|\psi(q_\Lambda, s)|$.

Теорема 1. *Функция поведения Алисы F не имеет аномалий 2-ого рода тогда и только тогда, когда соответствующий автоматный граф не имеет путей неположительного веса.*

На втором этапе посредством применения алгоритма Беллмана-Форда проверяется отсутствие начинающихся в инициальной вершине путей неположительного веса. Как известно, алгоритм Беллмана-Форда имеет сложность (см. [3]) $O(|V||E|)$, где $|V|$ — количество вершин, $|E|$ — количество ребер. И, следовательно, так как автомат-квадратный граф имеет $|Q|^2+1$ вершин и $|Q|^2|S|^2+|S|$ ребер, то сложность процедуры проверки составляет $O(|Q|^4|S|^2)$.

Источники и литература

1) Казаков И.Б. Алгоритм валидации ограниченного-детерминированного поведения передатчика в канале частичного стирания // Прикладная дискретная математика. 2023. № 59. С. 88-110.
2) Казаков И.Б. Критерий существования корректного протокола в канале частичного стирания // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. №1. С.133-151.
3) Bellman, Richard. “On a Routing Problem.” Quarterly of Applied Mathematics 16 (1958): 87–90.