Секция «Дискретная математика и математическая кибернетика»

# О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛАХ ОДНОРОДНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

**Научный руководитель – Боков Григорий Владимирович**

***Дробышев Александр Сергеевич***

*Аспирант*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра математической теории
интеллектуальных систем, Москва, Россия

*E-mail: drobyshev.sanya@yandex.ru*

Сегодня исследованию нейросетей уделяется большое внимание. Первая формальная математическая модель нейрона была представлена в 1943 году У. С. Мак-Каллоком и В. Питтсом [2], позднее в 1956 году С. К. Клини [3] показал, что каждый конечный автомат моделируется нейронной сетью с задержкой в два такта. В данной работе мы сформулируем условия, при которых стартовая конфигурация нейронной сети принадлежит ее предельному циклу.

Отображение $f : \{0,1\}^m \to \{0,1\}$ будем называть *пороговой функцией*, если существуют такие $w_i, h \in \mathbb{Z}$, что $f(x_1,\dots,x_n) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad w_1 \cdot x_1 + \dots + w_n \cdot x_n \geq h$.

*Нейроны* — это автоматные функции вида $\mathfrak{Z}_c f$, где $f$ — пороговая функция и $c \in \{0,1\}$. Множество всех нейронов обозначим через $\mathbf{N}$.

Пусть $f_1,\dots,f_n$ — пороговые булевы функции от $n+m$ переменных. *Нейронной сетью* назовём всякую схему из функциональных элементов с задержкой $\Sigma(f_1,\dots,f_n)$, заданную системой уравнений вида

$$y_1 = \mathfrak{Z}_{c_1} f_1(y_1,\dots,y_n)$$

$$\dots$$

$$y_n = \mathfrak{Z}_{c_n} f_n(y_1,\dots,y_n),$$

где $c_i \in \{0,1\}\ \forall\ i = 1,\dots,n$.

В данной работе рассматриваются нейронные сети, в которых каждому нейрону приписана одна и та же пороговая функция $f$. Такие нейронные сети будем называть *однородными* и обозначать $\Sigma(f)$.

Каждая нейронная сеть $\Sigma(f_1,\dots,f_n)$ определяет отображение $\Phi_\Sigma : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$, заданное условием:

$$\Phi(y_1,\dots,y_n) = (\mathfrak{Z}_{c_1} f_1(y_1,\dots,y_n),\dots,\mathfrak{Z}_{c_n} f_n(y_1,\dots,y_n)).$$

Набор $\alpha(t) = (y_1(t),\dots,y_n(t)) \in \{0,1\}^n$ будем называть *конфигурацией* сети в момент времени $t$. Конфигурации нейронной сети $\Sigma$ в моменты времени $t$ и $t+1$ связаны соотношениями $\alpha(t+1) = \Phi_\Sigma(\alpha(t))$.

*Предельным циклом* нейронной сети $\Sigma$ будем называть последовательность конфигураций $\alpha_1,\dots,\alpha_k \in \{0,1\}^n$ таких, что $\alpha_{i+1} = \Phi(\alpha_i)$ для любого $i = 1,\dots,k$ и $\alpha_1 = \Phi(\alpha_k)$.

Основной результат сформулирован в виде следующих теорем.

**Теорема 1.** *Пусть $G_\Sigma = (V,E)$ - связный граф однородной нейронной сети $\Sigma(f)$, где $f = x \wedge y$. Тогда конфигурация $\alpha(0)$ принадлежит предельному циклу сети $\Sigma(f)$ $\Leftrightarrow$ существуют такие $U_1,\dots,U_n \subseteq V, U_1 \cup \dots \cup U_n = V$, что:*

*1) Для любых $i = 1,\dots,n$ и $(u,v) \in E$ выполнено:*

а) *если* $v \in U_i$, *то* $u \in U_{i-1}$
б) *если* $u \in U_i$, *то* $v \in U_{i+1}$

*причем* $U_{n+1} = U_1$

2) *Если* $\exists u, v$ *такие, что* $u, v \in U_i, \alpha_u(0) = 0, \alpha_v(0) = 1$, *то не существует пути в графе* $G$ *из* $u$ *в* $v$.

*Для любой* $v \in U_i$ *такой, что* $\alpha_v(0) = 0$ *существует путь в графе* $G$ *из* $u$ *в* $v \in U_i$ *такую, что* $\alpha_u(0) = 0$.

**Теорема 2.** *Пусть* $G_\Sigma = (V, E)$ *- связный граф однородной нейронной сети* $\Sigma(f)$, *где* $f = x \vee y$. *Тогда конфигурация* $\alpha(0)$ *принадлежит предельному циклу сети* $\Sigma(f) \Leftrightarrow$ *существуют такие* $U_1, \dots, U_n \subseteq V, U_1 \cup \dots \cup U_n = V$, *что:*

1) *Для любых* $i = 1, \dots, n$ *и* $(u, v) \in E$ *выполнено:*

а) *если* $v \in U_i$, *то* $u \in U_{i-1}$
б) *если* $u \in U_i$, *то* $v \in U_{i+1}$

*причем* $U_{n+1} = U_1$

2) *Если* $\exists u, v : u, v \in U_i, \alpha_u(0) = 1, \alpha_v(0) = 0$, *то не существует пути в графе* $G$ *из* $u$ *в* $v$.

*Для любой* $v \in U_i$ *такой, что* $\alpha_v(0) = 1$ *существует путь в графе* $G$ *из* $u$ *в* $v \in U_i$ *такую, что* $\alpha_u(0) = 1$.