Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

# О бэровской классификации слабых показателей колеблемости корней решений линейных однородных систем дифференциальных уравнений Научный руководитель: Быков Владимир Владиславович

**Научный руководитель – Быков Владимир Владиславович**

***Похачевский Всеволод Андреевич***
*Аспирант*
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальных уравнений, Москва, Россия
*E-mail: elvira1171@list.ru*

Настоящий доклад посвящён бэровской классификации некоторых из показателей, введённых И.Н. Сергеевым в работах [1, 2].

Нижеследующее исследование состоит в отыскании классов Бэра, коим принадлежат слабые нижний и верхний показатели колеблемости корней решений линейных однородных систем дифференциальных уравнений.

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{C}^\infty\widetilde{\mathcal{M}}^n$ множество систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

с бесконечно дифференцируемыми функциями $A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ (которые мы отождествляем с задаваемыми ими системами) и метрикой

$$\rho(A, B) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \min\{|A^{(k)}(t) - B^{(k)}(t)|, (t + 1)^{-1}\}, \quad A, B \in \mathcal{C}^\infty\widetilde{\mathcal{M}}^n.$$

**Определение.** *Верхним и нижним слабыми показателями колеблемости корней* ненулевого решения $x(\cdot)$ системы (1) называются, соответственно, величины

$$\hat{\nu}^+_\circ(x) = \varlimsup_{t\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^+((x, m), t), \quad \check{\nu}^+_\circ(x) = \varliminf_{t\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^+((x, m), t),$$

где $\nu^+(y, t)$ – количество корней (т.е. нулей с учётом кратности) функции $y(\cdot)$ на промежутке $(0, t]$, $(\cdot\,, \cdot)$ – скалярное произведение, а звёздочка снизу обозначает выкалывание нуля.

Отметим, что введённые выше величины являются, вообще говоря, точками расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R} \sqcup \{-\infty, +\infty\}$, которую мы наделяем стандартным порядком и порядковой топологией.

Пусть $M$ и $N$ – какие-либо классы подмножеств метрического пространства $M$. Будем говорить [3], что функция $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит классу $(M,^*)$ (классу $(^*, N)$), если для всякого $r \in \mathbb{R}$ справедливо включение $f^{-1}((r, +\infty]) \in M$ (соответственно, включение $f^{-1}([r, +\infty]) \in N$). Напомним, что через $F_\sigma$ обозначается класс, состоящий из всевозможных счётных объединений замкнутых множеств, а через $F_{\sigma\delta}$ – класс, состоящий из счётных пересечений множеств из класса $F_\sigma$. Кроме того, через $X_A(\cdot\,, \cdot)$ условимся обозначить оператор Коши системы $A$.

**Теорема.** *Для любого $n \geq 2$ справедливы следующие утверждения:*

*1) функция $\mathcal{C}^\infty\widetilde{\mathcal{M}}^n \times \mathbb{R}^n_* \to \overline{\mathbb{R}}$, действующая по правилу $(A, \xi) \mapsto \check{\nu}^+_\circ(X_A(\cdot, 0)\xi)$, принадлежит классу $(F_\sigma,^*)$ и, в частности, принадлежит второму классу Бэра;*

*2) функция* $\mathcal{C}^\infty\widetilde{\mathcal{M}}^n \times \mathbb{R}^n_* \to \overline{\mathbb{R}}$, *действующая по правилу* $(A,\xi) \mapsto \hat{\nu}^+_\circ(X_A(\cdot,0)\xi)$, *принадлежит классу* $(^*, F_{\sigma\delta})$ *и, в частности, принадлежит третьему классу Бэра.*

**Следствие.** Для любой системы $A \in \mathcal{C}^\infty\widetilde{\mathcal{M}}^n$ спектры слабых показателей колеблемости корней решений системы $A$, т.е. множества $\{\check{\nu}^+_\circ(X_A(\cdot,0)\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n_*\}$ и $\{\hat{\nu}^+_\circ(X_A(\cdot,0)\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n_*\}$ являются суслинскими подмножествами расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}$.

## Источники и литература


1) Сергеев И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Сер. матем. 2012. Т. 76. № 1. С. 149–172.

2) Сергеев И.Н. Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. 2015. Вып. 2 (46). С. 171–183.

3) Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.–Л.: ОНТИ, 1937.