

Асимптотическое поведение уровней энергии квантовой свободной частицы в эллиптическом секторе.

Научный руководитель – Попеленский Фёдор Юрьевич

Никулин Михаил Александрович

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: nikmihale@gmail.com

В последние годы достигнут значительный прогресс в понимании гипотезы Биркгофа об интегрируемых плоских бильярдах (например, см. [1]). С другой стороны, были построены математически строгие доказательства неинтегрируемости некоторых бильярдов, например, эллиптических бильярдов в сильном магнитном поле [2,3]. Неинтегрируемые бильярды, так же как и бильярды в магнитном поле, исследуются в течение долгого времени, см. [4,5]. Изменение формы бильярдного стола от эллипса к, например, стадиону, немедленно приводит к хаотической динамике [6,7].

Хорошо известно свойство интегрируемости классических бильярдов в областях, ограниченных дугами софокусных квадрик. Оно следует из того, что в дополнение к полной энергии системы, существует другая сохраняющаяся величина: произведение угловых моментов относительно обоих фокусов. В случае круга степень этого дополнительного интеграла может быть понижена, поскольку сохраняется угловой момент относительно центра круга. С другой стороны, в [8] показано, что для бильярда в круговом секторе сохраняющаяся величина является не угловым моментом относительно центра, а его квадратом. Недавние работы А.Т. Фоменко и В.В. Ведюшкиной ([9–11], а также другие работы этих авторов) вновь привлекли внимание специалистов в этой теме.

В настоящей работе рассмотрено обобщение классической задачи, рассмотренной [12]. А именно, пусть задана область («эллиптический сектор»), ограниченная эллипсом с большой полуосью $0 < r_0$ и эксцентриситетом ε и дугой софокусной гиперболы (область A_ε) или двумя дугами софокусных гипербол (область B_ε). Общие для эллипса и гипербол фокусы имеют координаты $(\pm\varepsilon r_0, 0)$. Для обеих областей мы изучаем решения стационарного уравнения Шрёдингера $-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\psi = E\psi$. Мы устанавливаем асимптотику для уровней энергии $E(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ с точностью до $o(\varepsilon^2)$, включительно.

Доклад основан на результатах совместной работы Ф.Ю. Попеленского, А.И. Шафаревича и докладчика [13].

Источники и литература

- 1) Bialy M., Mironov A. E. The Birkhoff-Poritsky conjecture for centrally-symmetric billiard tables // Annals of Mathematics. — 2022. — Т. 196. — №. 1. — С. 389–413.
- 2) Bialy, M., Mironov, A.E., Shalom, L. Magnetic billiards: non-integrability for strong magnetic field; Gutkin type examples. // Journal of Geometry and Physics. — 2020. — Т. 154, —С. 103716.
- 3) Bialy M., Mironov A. E. Polynomial non-integrability of magnetic billiards on the sphere and the hyperbolic plane // Russian Mathematical Surveys. — 2019. — Т. 74. — №. 2. — С. 187.

- 4) Robnik, M., Berry, M.V. Classical billiards in magnetic fields. // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1985. — Т. 18. — №. 9. — С. 1361.
- 5) Berry M. V., Robnik M. Statistics of energy levels without time-reversal symmetry: Aharonov-Bohm chaotic billiards // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1986. — Т. 19. — №. 5. — С. 649.
- 6) Bunimovich L. A. On ergodic properties of certain billiards // Functional Analysis and Its Applications. — 1974. — Т. 8. — №. 3. — С. 254–255.
- 7) Stöckmann, H.J. Quantum chaos: an introduction. // Cambridge University Press — 1999.
- 8) Góngora-T A. et al. Quantum and classical solutions for a free particle in wedge billiards // Physics Letters A. — 2000. — Т. 274. — №. 3–4. — С. 117–122.
- 9) Fokicheva V. V. Description of singularities for billiard systems bounded by confocal ellipses or hyperbolas // Moscow University Mathematics Bulletin. — 2014. — Т. 69. — №. 4. — С. 148–158.
- 10) Fokicheva V. V. A topological classification of billiards in locally planar domains bounded by arcs of confocal quadrics // Sbornik: Mathematics. — 2015. — Т. 206. — №. 10. — С. 1463.
- 11) Vedyushkina V. V., Fomenko A. T. Integrable geodesic flows on orientable two-dimensional surfaces and topological billiards // Izvestiya: Mathematics. — 2019. — Т. 83. — №. 6. — С. 1137.
- 12) Rayleigh J. W. Theory of Sound // MacMillan — 1896.
- 13) Nikulin M. A., Popelensky T. Y., Shafarevich A. I. Asymptotic behaviour of energy levels of a quantum free particle in an elliptic sector // Physica Scripta. — 2024. — Vol. 99, no. 1. — P. 015207.