Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Классификация эквивариантно простых функций, нечётных по одной переменной

Научный руководитель – Асташов Евгений Александрович

Козяев Сергей Константинович

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра теории динамических систем, Москва, Россия

E-mail: sergei.koziaev@math.msu.ru

Пусть линейное действие группы $\mathbb{Z}_2$ на пространствах $\mathbb{C}^{l+m}$ и $\mathbb{C}$ задано следующим действием её образующей σ:

$$\sigma \cdot (x_1, ..., x_l, y_1, ..., y_m; w) = (-x_1, ..., -x_l, y_1, ..., y_m; (-1)^{\varepsilon} w), \tag{1}$$

где $\varepsilon = 0, 1$. Голоморфная в некоторой окрестности нуля $U(0) \subset \mathbb{C}^{l+m}$ функция $f\colon (U(0), 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ называется *эквивариантной* относительно действия (1), если для каждого $x \in U(0)$ выполнено равенство

$$f(\sigma \cdot x) = \sigma \cdot f(x).$$

Множество ростков таких функций будем обозначать $\mathcal{O}^{\varepsilon}_{l,m}$. Ростки функций, эквивариантных относительно действия (1), где $\varepsilon = 0$ (где $\varepsilon = 1$), назовём *чётными (нечётными) по совокупности переменных* $x_1, ..., x_l$. Комплексно-аналитическая в некоторой окрестности $U(0) \subset \mathbb{C}^{l+m}$ замена координат $\Phi\colon (\mathbb{C}^{l+m}, 0) \to (\mathbb{C}^{l+m}, 0)$ называется *эквивариантной* относительно действия (1), если для каждого $x \in U(0)$ выполняется равенство

$$\Phi(\sigma \cdot x) = \sigma \cdot \Phi(x).$$

Два ростка эквивариантных функций назовём *эквивалентными*, если в некоторой окрестности нуля в $\mathbb{C}^{l+m}$ существует соответствующий эквивариантный автоморфизм, который один росток переводит в другой.

Эквивариантная функция с критической точкой в нуле и нулевым критическим значением называется *эквивариантно простой*, если в пространстве r-струй эквивариантных функций при достаточно большом r достаточно малая окрестность любой точки v из орбиты f (относительно действия группы эквивариантных автоморфизмов) пересекается лишь с конечным числом орбит и число примыкающих орбит в пространстве r-струй эквивариантных функций остаётся ограниченным при $r \to \infty$.

Существует задача классификации эквивариантно простых функций из $\mathcal{O}^{\varepsilon}_{l,m}$ для произвольных $l, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $\varepsilon = 0, 1$. Частные случаи её рассмотрены в работах [1] – [4]. В статье [1] классифицированы простые функции при тривиальном действии группы, то есть для случая $\mathcal{O}^{0}_{0,m}$ с произвольным $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. В статье [2] рассматривается случай функций, чётных по одной переменной. В работе [3] этот результат обобщается на случай функций, чётных по произвольному числу переменных $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. В работе [4] классифицированы эквивариантно простые функции из $\mathcal{O}^{1}_{l,0}$, то есть нечётные по всем переменным.

В своём докладе я бы хотел рассказать о классификации функций, нечётных по одной переменной. Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Любой эквивариантно простой росток f из $\mathcal{O}^{1}_{1,m}$, имеющий в нуле критическую точку и нулевое критическое значение, эквивалентен одному из ростков вида*

$$
\begin{array}{lll}
W: & xy_1; & \\
A_k: & x^3 + xy_1^{k+1} + xQ(y_2, ..., y_m), & k \geq 1; \\
D_k: & x^3 + xy_1^2 y_2 + xy_2^{k-1} + xQ(y_3, ..., y_m), & k \geq 4; \\
E_6: & x^3 + xy_1^3 + xy_2^4 + xQ(y_3, ..., y_m); & \\
E_7: & x^3 + xy_1^3 + xy_1 y_2^3 + xQ(y_3, ..., y_m); & \\
E_8: & x^3 + xy_1^3 + xy_2^5 + xQ(y_3, ..., y_m); & \\
B_k: & x^{2k+1} + xQ(y_1, ..., y_m), & k \geq 2; \\
C_k: & x^3 y_1 + xy_1^k + xQ(y_2, ..., y_m), & k \geq 3; \\
F_4: & x^5 + xy_1^3 + xQ(y_2, ..., y_m), &
\end{array}
$$

где $Q(y_1, ..., y_m) = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_m^2$.

Источники и литература

1) *В.И. Арнольд.* Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля A_k, D_k, E_k и лагранжевы особенности // Функциональный анализ и его приложения, 6:4 (1972), 3–25.
2) *В.И. Арнольд.* Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли B_k, C_k, F_4 и особенности эволют. УМН, 33:5(203), 91–107 (1978).
3) *С.М. Гусейн-Заде, А.-М.Я. Раух.* О простых $\mathbb{Z}_2$-инвариантных и угловых ростках функций. Математические заметки, 107:6, 855–864 (2020).
4) *W. Domitrz, M. Manoel, P. de M. Rios.* The Wigner caustic on shell and singularities of odd functions. Journal of Geometry and Physics, 71, 58–72 (2013).