Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Решение систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

Научный руководитель – Кожевникова Лариса Михайловна

Трошков Фёдор Антонович

Студент (бакалавр)

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия

E-mail: ftroshkov04@gmail.com

Рассматривается метод решения систем дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = A_i\left(x_1,\ \ldots, x_n, z\right), i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{1}$$

Эта система содержит одну неизвестную функцию $z\left(x_1,\ \ldots, x_n\right)$ и в общем случае решения не имеет.

В работе [1] приведено необходимое и достаточное условие разрешимости в случае $n = 2$. Здесь это условие обобщено для $n > 2$ и предложен итеративный метод решения систем вида (1).

Теорема 1. *Пусть функции $A_i\left(x_1,\ \ldots, x_n, z\right), i \in \{1, \ldots, n\}$, дифференцируемы по всем аргументам в области $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Если в области D тождественно выполнены равенства*

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j} + \frac{\partial A_i}{\partial z} A_j = \frac{\partial A_j}{\partial x_i} + \frac{\partial A_j}{\partial z} A_i, \quad i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j, \tag{2}$$

то решение системы (1) сводится к интегрированию n обыкновенных дифференциальных уравнений (итеративный метод).

Если не все равенства (2) выполнены тождественно, возникают алгебраические уравнения относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$. В таком случае частные решения системы (1) будут находиться среди решений совокупности полученных уравнений. Для обоих случаев построены иллюстративные примеры разрешимых систем.

Источники и литература

1) Егоров А. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. М.: Физматлит, 2005.