Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Асимптотика решений уравнений на сетках в дискретном времени

Научный руководитель – Данилов Владимир Григорьевич

Михайлова Светлана Олеговна
Студент (магистр)
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Московский институт электроники и математики им. А.Н. Тихонова, Москва, Россия
E-mail: valsvetmih@yandex.ru

В работе на примере задачи об одномерном простом случайном блуждании развивается метод для асимптотического решения разностных параболических уравнений с некомпактным лагранжевым многообразием. Строится неосциллирующее решение Вентцеля-Крамера-Бриллюэна продолженной задачи с помощью техники псевдодифференциальных операторов. За счёт операторного представления дельта-функции Дирака в виде экспоненты находится фундаментальное решение задачи. Переход от решения непрерывной задачи к решению дискретной задачи осуществляется посредством осреднения в пространстве L^1.

Задача описывается разностными уравнениями вида:

$$U_i^{n+1} = a_{i,i-k}U_{i-k}^n + \ldots + a_{i,i+m}U_{i+m}^n, \tag{1}$$

где U_k^n – вероятность нахождения частицы в точке x_k на n шаге блуждания, $a_{i,j}$ — вероятность перехода из состояния i в состояние j, такая что $a_{i,j} \geqslant 0$, $\sum_{j=i-k}^{i+m} a_{i,j} = 1$; величины $a_{i,j}$ и U_i^0 заданы. Функцию дискретного аргумента U_i^n мы заменяем на функцию $U\big(x,t\big)$, где h – длина шага по времени и в пространстве, а уравнение на решётке заменяем на псевдодифференциальное уравнение:

$$e^{h\frac{\partial}{\partial t}}U = \left(\sum_{j=-k}^{m} a_j(x)e^{jh\frac{\partial}{\partial x}}\right)U, \tag{2}$$

где $e^{kh\frac{\partial}{\partial x}}(f) = f(x+kh)$ – оператор сдвига.

Сведение (2) к (1), имеющему вероятностный смысл, делается так:

$$U_j^n = \frac{1}{h^2}\int\limits_{\mathbb{R}^1}\int\limits_{\mathbb{R}^1} G(x,\xi,nh)\Pi_0(x-\xi)d\xi\Pi_j(x)dx, \tag{3}$$

где $\Pi_j = \begin{cases} 0, & x < j-\frac{h}{2}, j+\frac{h}{2} \leqslant x; \\ 1, & j-\frac{h}{2} \leqslant x < j+\frac{h}{2}. \end{cases}$ $G(x,\xi,t)$ – фундаментальное решение уравнения (2), то есть решение задачи Коши при $G|_{t=0} = \delta(x-\xi)$.

Далее находится асимптотика фундаментального решения $G(x,\xi,t)$ псевдодифференциального уравнения (2) с помощью метода ВКБ в виде: $G(x,\xi,t) = \varphi(x,\xi,t)e^{-\frac{S(x,\xi,t)}{h}}$, где функция фазы – $S(x,\xi,t)$ – удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби для (2), а функция амплитуды – $\varphi(x,\xi,t)$ – уравнению переноса для (2).

Из системы Гамильтона для фазы не трудно найти область достижимости случайного блуждания в $\mathbb{R}^1$ $t \geqslant |x-\xi|$. Аналогично для многомерных случаев в $\mathbb{R}^n$ $t \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - \xi_i|$.

Источники и литература

1) Danilov V. G. Nonsmooth Nonoscillating Exponential-type Asymptotics for Linear Parabolic PDE. SIAM Journal on Mathematical Analysis. 2017. Vol. 49. No. 5. P. 3550-3572.