Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

О явном виде функции Грина для интегро-дифференциальных уравнений Колмогорова-Фёллера

Научный руководитель – Розанова Ольга Сергеевна

Крутов Николай Андреевич

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальных уравнений, Москва, Россия

E-mail: kru.tov@outlook.com

Рассматривается марковский процесс со случайными скачками и детерминированной реверсией к нулю, задаваемый на положительной полуоси следующим стохастическим дифференциальным уравнением:

$$dX_t = -\beta X_t dt + \lambda d\Gamma_t, \tag{1}$$

где $\beta \geq 0$ - константа, характеризующая скорость возврата к нулю, Γ_s - чисто разрывный случайный процесс, $\lambda \geq 0$ - константа, характеризующая интенсивность скачков. Такой процесс с экспоненциальным законом распределения для скачков используется в биологии при моделировании экспрессии генов. Плотность вероятности $P(t,x)$ заданного СДУ (1) марковского процесса описывается уравнением Колмогорова-Фёллера [2]:

$$\frac{\partial}{\partial t}P(t,x) - \frac{\partial}{\partial x}(\beta x P(t,x)) - \lambda\Big(\int_0^x P(t,z)p(x-z)dz - P(t,x)\Big) = 0, \tag{2}$$

здесь $p(z), z \geq 0$ - вероятностная плотность на положительной полуоси, описывающая распределение независимых случайных величин, задающих амплитуду скачков, $\int_0^{+\infty} p(z)dz = 1$.

Обозначим за $\mathcal{G}(t,x,y)$ функцию Грина задачи Коши, т.е. решение уравнения (2) с начальной плотностью $P|_{t=0} = \delta(x-y)$. Если известна $\mathcal{G}(t,x,y)$, то решение задачи Коши для уравнения (2) с любыми интегрируемыми начальными данными $P|_{t=0} = \phi(x)$, $\int_0^{+\infty} \phi(x)dx = 1$ находится следующим образом:

$$P(t,x) = \int_0^{+\infty} \mathcal{G}(t,x,y)\phi(y)dy.$$

Выражение для функции Грина в случае экспоненциального ядра скачкообразного процесса можно найти в [1]. В настоящей работе изучается решение уравнения (2) для некоторых других функций $p(z)$. В частности, для линейной комбинации двух экспонент получена формула функции Грина:

Теорема 1. *Пусть $p(z) = ak_1e^{-k_1z} + (1-a)k_2e^{-k_2z}$. Тогда решение $\mathcal{G}(t,x,y)$ уравнения (2) с начальными данными $P|_{t=0} = \delta(x-y)$ имеет вид:*

$$\mathcal{G}(t,x,y) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\delta(x') + \\ + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{\substack{j=0\\ i+j\geq 1}}^{\infty} C^i_{\frac{a\lambda}{\beta}} C^j_{\frac{(1-a)\lambda}{\beta}} (\mathrm{e}^{-\beta t}-1)^{i+j} \sum_{s=0}^{i}\sum_{\substack{r=0\\ s+r\geq 1}}^{j} C_i^s C_j^r \Big[\Big(\frac{k_1}{w+k_1}\Big)^s\Big(\frac{k_2}{w+k_2}\Big)^r\Big](x'), \tag{3}$$

где $x' = x - y\mathrm{e}^{-\beta t}$, $[\cdot]$ - обратное преобразование Лапласа, причём

$$\Big[\Big(\frac{k_1}{w+k_1}\Big)^s\Big(\frac{k_2}{w+k_2}\Big)^r\Big](x) = \\ = \frac{1}{(s+r+1)!}x^{-2+\frac{r}{2}+\frac{s}{2}}{k_2}^r{k_1}^s\Big((1+s)\,(s+r)\,M_{\frac{s}{2}-\frac{r}{2}+1,\frac{s}{2}+\frac{r}{2}+\frac{1}{2}}(x\,(k_1-k_2))+ \\ + r\,(r+s+x\,(k_1-k_2))\,M_{\frac{s}{2}-\frac{r}{2},\frac{s}{2}+\frac{r}{2}+\frac{1}{2}}(x\,(k_1-k_2))\Big)\mathrm{e}^{-\frac{x(k_2+k_1)}{2}}\,(k_1-k_2)^{-1-\frac{s}{2}-\frac{r}{2}}, \quad (4)$$

M - обозначение для функций Уиттекера.

Источники и литература

1) *О.С. Розанова. О решении уравнения Колмогорова–Феллера, возникающего в модели биологической эволюции // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2023, № 6, 23–27*
2) *N. Friedman, L. Cai, & X.S. Xie. Linking stochastic dynamics to population distribution: an analytical framework of gene expression // Physical review letters, 97 16, 168302*