Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Об одном вопросе, связанном с полумодулярностью решёток подгрупп конечных групп

Научный руководитель – Титов Георгий Николаевич

Цыбин Игорь Андреевич
Студент (магистр)
Кубанский государственный университет, Факультет математики и компьютерных наук, Краснодар, Россия
E-mail: igor.trysbin@gmail.com

В соответствии с [2] решётку L называем k-верхне полумодулярной (k-нижне полумодулярной) где k – неотрицательное целое число, если для любых элементов $a, b \in L$ выполняется условие $d(a \vee b : b) \leq d(a : a \wedge b) + k$ ($d(a : a \wedge b) \leq d(a \vee b : b) + k$). Под $d(x : y)$ при $x, y \in L$ и $y \leq x$ понимаем наибольшую длину среди длин всех максимальных цепей от x до y. Через $\mathbb{M}^k$ и $\mathbb{M}_k$ обозначаем классы конечных k-верхне полумодулярных и k-нижне полумодулярных решёток соответственно.

Пусть L – конечная решётка, через 0 и 1 согласно [4] обозначаем минимальный и максимальный её элементы соответственно. При $x, y \in L$ и $y \leq x$ также согласно [4] через x/y обозначаем частное $\{z \in L | y \leq z \leq x\}$, которое является подрешёткой решётки L. Будем говорить, что конечная неодноэлементная решётка L удовлетворяет условию α (β), если $L \in \mathbb{M}_0$ ($L \in \mathbb{M}^0$) и для любого её элемента $u < 1$ решётка $u/0$ принадлежит классу $\mathbb{M}^0$ ($\mathbb{M}_0$).

В [3] был сформулирован следующий результат, доказательство которого имеется в [1]: если решётка является решёткой подгрупп некоторой конечной неединичной группы и удовлетворяет условию α, то она принадлежит классу $\mathbb{M}^1$. Имеет место в некотором смысле двойственный к указанному результат.

Теорема. Если решётка является решёткой подгрупп некоторой конечной неединичной группы и удовлетворяет условию β, то она принадлежит классу $\mathbb{M}_1$.

Отметим, что существует решётка, которая удовлетворяет условию β, но не принадлежит классу $\mathbb{M}_1$. Например, такой решёткой является множество $\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,3\}, \{1,2\}, \{2,4\}, \{1,3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$,
состоящее из подмножеств множества $\{1,2,3,4\}$, относительно отношения включения "$\subseteq$" взятого в качестве частичного порядка.

Источники и литература

1) Дейнекина А. А, Титов Г. Н. Конечные группы с условием обобщённой полумодулярности решёток подгрупп // Алгебра и приложения: сборник научных трудов / под редакцией А. В. Лежнева; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Кубанский государственный университет. – Краснодар: Кубанский гос. университет, 2023. С. 16-31.

2) Титов Г. Н. О разрешимости обобщённо полумодулярных конечных групп. Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2010. Т. 7, №1. С. 66-69.

3) Титов Г. Н. О конечных группах с некоторыми условиями полумодулярности решёток подгрупп // XIV Международная школа-конференция по теории групп, посвящённая памяти В. А. Белоногова, В. А. Ведерникова и Л. А. Шеметкова: сборник тезисов. Брянск. 2022. С. 56.

4) Холл М. Теория групп. М: ИЛ, 1962.