Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Алгебры ветвления особых простых групп Ли

Научный руководитель – Тимашев Дмитрий Андреевич

Кучеренко Александр Игоревич
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей алгебры, Москва, Россия
E-mail: kuchkiper@gmail.com

Пусть G – связная редуктивная комплексная группа Ли, а $H \subset G$ – ее связная редуктивная подгруппа. Рассмотрим конечномерное неприводимое рациональное представление $R : G \to \mathrm{GL}(V)$. Его ограничение на H уже не будет неприводимым, а разложится в сумму неприводимых H-представлений:

$$R|_H = R_1 \oplus R_2 \oplus \cdots \oplus R_k,$$

где R_i – неприводимые представления группы H. Набор слагаемых в этом разложении определен однозначно с точностью до изоморфизма.

Зафиксируем пару групп $H \subset G$. Тогда *задачей ветвления* называется задача получения такого разложения для произвольного неприводимого представления R группы G. Ответ к этой задача называется *правило ветвления*.

Ввиду классификации редуктивных групп, в первую очередь задачу ветвления стоит рассматривать для простых групп. Для классических простых групп правила ветвления известны уже достаточно давно: случай унимодулярной группы был решен Г. Вейлем [1], ортогональной группы И.М. Гельфандом и М.Л. Цетлиным [3], для симплектической группы Д.П. Желобенко [4]. Однако для особых простых групп G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 правило ветвления не было получено до сих пор.

В своем докладе я расскажу про вывод правила ветвления для первых двух особых групп: G_2 и F_4. Несомненно, правило ветвления зависит от подгруппы H, которую мы выбрали. Для классических групп выделены канонические пары H, G с понижением ранга: $SL_{n-1} \subset SL_n$, $SO_{n-1} \subset SO_n$, $Sp_{2n-2} \subset Sp_{2n}$. Для особых групп таких ярко выраженных пар нет, однако, есть смысл выбирать максимальную связную редуктивную подгруппу H. Ввиду этого замечания, для группы G_2 было выбрано ветвление на A_2, а для F_4 – ветвление на B_4. В действительности, для пары групп $B_4 \subset F_4$ вместо правила ветвления была получена алгебра ветвления, что является эквивалентным алгебраическим результатом, а не комбинаторным.

Описания системы простых корней для соответствующих алгебр Ли были взяты из книги Э.Б. Винберга и О.Л. Онищика *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам* [2], множество вычислений были выполнены при помощи пакета компьютерной алгебры Macaulay2 [5].

Источники и литература

1) Г. Вейль. *Теория групп и квантовая механика.* Библиотека Теоретической Физики. Москва: Наука. 496 стр., 1986.
2) Э.Б. Винберг, А.Л. Онищик. *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам.* УРСС, 1995.
3) И.М. Гельфанд, М.Л. Цетлин. *Конечномерные представления группы ортогональных матриц.* Докл. АН СССР, Новая Серия, 71:1017–1020, 1950

4) Д.П. Желобенко. *Классические группы. Спектральный анализ конечномерных представлений.* УМН, 17(131):27–120, 1962.

5) D. R. Grayson and M. E. Stillman. Macaulay2, a software system for research in algebraic geometry. Available at http://www2.macaulay2.com