Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Проблема Уонга для многомерных (-1,1)-матриц малых размерностей и порядков

Научный руководитель – Маркова Ольга Викторовна

Евсеев Илья Михайлович
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей алгебры, Москва, Россия
E-mail: 2000.ilya.09.06@gmail.com

Определение перманента квадратной матрицы восходит к работам Коши.

Существует известная проблема Уонга для квадратных $(-1,1)$-матриц, то есть матриц с элементами из множества $\{-1,1\}$.

Проблема 1. (Уонг, [3, проблема 2]) Пусть A — невырожденная $(-1,1)$-матрица. Существует ли точная верхняя грань для $|per(A)|$?

Кройтером была выдвинута более общая гипотеза, решающая проблему Уонга. Данная гипотеза была расширена и доказана в более сильной формулировке в работе [2].

Гипотеза 2. (Будревич, Гутерман, [2, гипотеза 1.6]) Пусть $n, r \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$, $0 \leq r \leq n-1$. Рассмотрим $(-1,1)$-матрицу A порядка n с $rkA = r+1$. Тогда неравенство

$$|perA| \leq perD_{(n,r)}$$

выполнено для всех значений n и rkA, за исключением невырожденной матрицы порядка 4, где $D_{(n,r)} = (d_{ij})$ — $(-1,1)$-матрица порядка n, такая, что $d_{ij} = -1 \Leftrightarrow i = j, i \in \{1, \dots, r\}$.

Рассмотрим многомерные матрицы.

Определение 3. Пусть $n, k \in \mathbb{N}$, обозначим

$$I_n^k = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) | \alpha_i \in \{1, \dots, n\}\}$$

— множество индексов. *k-мерной матрицей A порядка n* называется массив чисел $(a_\alpha)_{\alpha \in I_n^k}$, $a_\alpha \in \mathbb{R}$.

Известны обобщения на многомерные матрицы как перманента, так и определителя [4].

Аналогично двумерному случаю можно поставить вопрос:

Проблема 2. Пусть A — k-мерная невырожденная $(-1,1)$-матрица порядка n. Какова верхняя граница для $|per(A)|$?

В докладе будет рассмотрена проблема 2 для многомерных $(-1,1)$-матриц малых размерностей и порядков.

Автор благодарен научным руководителям О.В. Марковой и А.Э. Гутерману за ценные обсуждения и замечания.

Список литературы

[1] А. А. Тараненко, Перманенты многомерных матриц: свойства и приложения, дискретный анализ и исследование операций, 23, No 4. (2016) 35–101.

[2] M.V. Budrevich, A.E. Guterman, Kräuter conjecture on permanents is true, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 162 (2019) 306-343.

[3] E.T.H. Wang, On permanents of $(+1,-1)$-matrices, Israel J. Math. 18 (1974) 353–361.

[4] Н. П. Соколов, Пространственные матрицы и их приложения, Москва: ФМЛ, 1960, 299 стр.