

Ветвящиеся процессы переменного типа

Научный руководитель – Шкляев Александр Викторович

Ладнев Алексей Ильич

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра математической статистики и
случайных процессов, Москва, Россия

E-mail: alex.ladnev@gmail.com

Пусть $P := \{p_i, i \geq 0\}$ и $Q := \{q_i, i \geq 0\}$ – дискретные распределения на целых неотрицательных числах с $\mathbf{E}_P X > 1$, $\mathbf{E}_Q X < 1$ и $p_0 > 0$, $\{\tau_i\}_{i=1}^\infty$ – последовательность натуральных чисел, а k и l – два натуральных параметра. Определим рекуррентно две последовательности

$$T_0^+ = 0, T_i^- = T_i^+ + \tau_i k, T_{i+1}^+ = T_i^- + \tau_i l.$$

Тогда ветвящимся процессом переменного типа (ВППТ) с начальным размножением назовем процесс, заданный соотношением

$$Z_0 = 1, Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{Z_n} X_{i,j}, \quad (1)$$

где $\{X_{i,j}\}$ – независимые в совокупности случайные величины, причем при каждом фиксированном i $\{X_{i,j}\}$ одинаково распределены с распределением $\{p_i\}$, когда $i \in (T_l^+, T_l^-]$, и с распределением $\{q_i\}$, когда $i \in (T_l^-, T_{l+1}^+]$.

ВППТ с начальным упадком задается соотношением (1) с рекуррентными последовательностями

$$T_0^- = 0, T_i^+ = T_i^- + \tau_i l, T_{i+1}^- = T_i^+ + \tau_i k.$$

При этом при $i \in (T_l^-, T_l^+]$ мы предполагаем, что $X_{i,j}$ имеют распределение $\{q_i\}$, при $i \in (T_l^+, T_{l+1}^-]$ – распределение $\{p_i\}$.

Дадим более понятную интерпретацию ВППТ с начальным размножением. В чашке Петри, которая находится под лампой, в начальный момент времени содержится одна бактерия. Когда лампа включена, бактерии размножаются с распределением $\{p_i\}$, если выключена – с распределением $\{q_i\}$. В момент $t = 0$ лампа включается и светит до момента $t = k\tau_1$, затем в течении $l\tau_1$ времени она выключена. После этого цикл свечения лампы повторяется, но уже с продолжительностями $k\tau_2$ и $l\tau_2$, и так далее. ВППТ с начальным упадком отличается от рассмотренного выше тем, что в начальный момент лампа выключена.

Будем называть ВППТ докритическим, если $m := (\mathbf{E}_P X)^k (\mathbf{E}_Q X)^l < 1$, критическим, если $m = 1$ и надкритическим, если $m > 1$.

В докладе мы рассмотрим вероятности вырождения всех трех типов ВППТ, и покажем необходимое условие вырождения процесса с вероятностью меньшей 1.

Также отдельно рассмотрим связь вероятности вырождения надкритического процесса со скоростью роста последовательности $\{\tau_i\}$, в том числе найдем условие выполнения теоремы о сходимости надкритического процесса в $L^2(P)$.

Для докритического процесса нами будет описана асимптотика невырождения процесса, а так же условная предельная теорема в точках переходов цикла.

В случае критического ВППТ будут рассмотрены вероятности невырождения процесса в моменты T_i^+ и T_i^- .

Список литературы

- [1] Лекционные курсы НОЦ / Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (МИАН). – М.: МИАН, 2008. Вып. 8: Ветвящиеся процессы и их применения / Ватутин В. А. – 108 с
- [2] Коршунов И. Д. Ветвящиеся процессы в случайной среде с замораживаниями / Дискретная математика, 2023, 35:3, 20–36