

Ветвящиеся процессы переменного типа

Научный руководитель – Шкляев Александр Викторович

*Ладнев Алексей Ильич*

*Студент (специалист)*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,  
Механико-математический факультет, Кафедра математической статистики и  
случайных процессов, Москва, Россия

*E-mail: alex.ladnev@gmail.com*

Пусть  $P := \{p_i, i \geq 0\}$  и  $Q := \{q_i, i \geq 0\}$  – дискретные распределения на целых неотрицательных числах с  $\mathbf{E}_P X > 1$ ,  $\mathbf{E}_Q X < 1$  и  $p_0 > 0$ ,  $\{\tau_i\}_{i=1}^\infty$  – последовательность натуральных чисел, а  $k$  и  $l$  – два натуральных параметра. Определим рекуррентно две последовательности

$$T_0^+ = 0, T_i^- = T_i^+ + \tau_i k, T_{i+1}^+ = T_i^- + \tau_i l.$$

Тогда ветвящимся процессом переменного типа (ВППТ) с начальным размножением назовем процесс, заданный соотношением

$$Z_0 = 1, Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{Z_n} X_{i,j}, \quad (1)$$

где  $\{X_{i,j}\}$  – независимые в совокупности случайные величины, причем при каждом фиксированном  $i$   $\{X_{i,j}\}$  одинаково распределены с распределением  $\{p_i\}$ , когда  $i \in (T_l^+, T_l^-]$ , и с распределением  $\{q_i\}$ , когда  $i \in (T_l^-, T_{l+1}^+]$ .

ВППТ с начальным упадком задается соотношением (1) с рекуррентными последовательностями

$$T_0^- = 0, T_i^+ = T_i^- + \tau_i l, T_{i+1}^- = T_i^+ + \tau_i k.$$

При этом при  $i \in (T_l^-, T_l^+]$  мы предполагаем, что  $X_{i,j}$  имеют распределение  $\{q_i\}$ , при  $i \in (T_l^+, T_{l+1}^-]$  – распределение  $\{p_i\}$ .

Дадим более понятную интерпретацию ВППТ с начальным размножением. В чашке Петри, которая находится под лампой, в начальный момент времени содержится одна бактерия. Когда лампа включена, бактерии размножаются с распределением  $\{p_i\}$ , если выключена – с распределением  $\{q_i\}$ . В момент  $t = 0$  лампа включается и светит до момента  $t = k\tau_1$ , затем в течении  $l\tau_1$  времени она выключена. После этого цикл свечения лампы повторяется, но уже с продолжительностями  $k\tau_2$  и  $l\tau_2$ , и так далее. ВППТ с начальным упадком отличается от рассмотренного выше тем, что в начальный момент лампа выключена.

Будем называть ВППТ докритическим, если  $m := (\mathbf{E}_P X)^k (\mathbf{E}_Q X)^l < 1$ , критическим, если  $m = 1$  и надкритическим, если  $m > 1$ .

В докладе мы рассмотрим вероятности вырождения всех трех типов ВППТ, и покажем необходимое условие вырождения процесса с вероятностью меньшей 1.

Также отдельно рассмотрим связь вероятности вырождения надкритического процесса со скоростью роста последовательности  $\{\tau_i\}$ , в том числе найдем условие выполнения теоремы о сходимости надкритического процесса в  $L^2(P)$ .

Для докритического процесса нами будет описана асимптотика невырождения процесса, а так же условная предельная теорема в точках переходов цикла.

В случае критического ВППТ будут рассмотрены вероятности невырождения процесса в моменты  $T_i^+$  и  $T_i^-$ .

## Список литературы

- [1] Лекционные курсы НОЦ / Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (МИАН). – М.: МИАН, 2008. Вып. 8: Ветвящиеся процессы и их применения / Ватутин В. А. – 108 с
- [2] Коршунов И. Д. Ветвящиеся процессы в случайной среде с замораживаниями / Дискретная математика, 2023, 35:3, 20–36