Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Модель блуждания по полупрямой с накоплением частиц в нуле

Научный руководитель – Яровая Елена Борисовна

Гусаров Александр Сергеевич

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия

E-mail: aleksandr.gusarov@math.msu.ru

В работе изучается модель блуждания с дискретным временем на целочисленной полупрямой $\mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ с накоплением частиц в точке $x = 0$, предложенная проф. В. А. Малышевым. Подобные рода модели, рассмотренные на полупрямой, могут описывать различные естественные процессы, в частности рост тромба, см. например [1]. Мы предполагаем, что в начальный момент времени $t = 0$ в каждой точке $\mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ независимо от других точек с вероятность $0 < p < 1$ присутствует 1 частица и с вероятностью $q = 1 - p$ отсутствует. Частицы перемещаются независимо друг от друга. Перемещение частиц в каждый момент времени описывается матрицей переходных вероятностей $A = \{a(x, y)\}$, элементы которой удовлетворяют следующим условиям: $a(0, 0) = 1$; для всех $y \neq 0$ $a(0, y) = 0$; для всех $x \neq 0$ $a(x, x-1) = p_-$, $a(x, x+1) = p_+ = 1 - p_-$; для всех $x \neq 0$, для всех y, таких что $y \neq x - 1 \wedge y \neq x + 1$, $a(x, y) = 0$.

Целью работы является изучение времени достижения точки $x = 0$ частицей, которая в начальный момент времени $t = 0$ была в точке $x = n$, и поведения накопления частиц $N(t)$ в точке $x = 0$. Перечислим основные результаты:

1. Установлено, что математическое ожидание $\tau(n)$ времени достижения точки 0 частицей, которая в начальный момент времени $t = 0$ была в точке $x = n$, в случае $p_- > p_+$ равняется

$$\tau(n) = \frac{n}{p_- - p_+};$$

2. Вычислено математическое ожидание $m_1(t)$ числа частиц $N(t)$ в точке $x = 0$, и в каждый момент времени t оно равняется

$$m_1(t) = p\left(1 + p_- t - p_- p_+ \sum_{k=0}^{[(t-1)/2]} \frac{(2k)!}{(k+1)!k!} p_-^k p_+^k (t - 2k - 1)\right);$$

3. В случае $p_- > p_+$ получена следующая оценка для старших моментов $m_n(t)$ численности частиц $N(t)$ в точке 0:

$$m_n(t) = m_1^n(t) + O(m_1^{n-1}(t)), \quad t \to \infty;$$

4. На основе предыдущей оценки доказана предельная теорема для численностей частиц $N(t)$ в точке $x = 0$ в случае $p_- > p_+$:

$$\frac{N(t)}{m_1(t)} \xrightarrow{P} 1, \quad t \to \infty.$$

При доказательстве вышеперечисленных утверждений используются различные методы. Математическое ожидание $\tau(n)$ и математическое ожидание $m_1(t)$ найдены при помощи метода производящих функций. Оценка для старших моментов $m_n(t)$ получена при помощи непосредственной оценки моментов сверху многочленом степени n по $m_1(t)$, коэффициентами которого являются соответствующие числа Стирлинга второго рода. Предельная теорема доказана при помощи проверки сходимости моментов и проверки выполнения условий Карлемана, для получения сходимости по распределению. Данный метод можно увидеть, например, в [2]. Далее проверено, что моменты задают константу 1, а сходимость по распределению к константе влечёт сходимость по вероятности к ней.

Источники и литература

1) Замятин А. А., Малышев В. А. Накопление на границе для одномерной стохастической системы частиц // Пробл. передачи информ. 2007. Том 4. Вып. 4. С. 68–82
2) Яровая Е. Б. Ветвящиеся случайные блуждания в случайной среде. М., 2007