Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Предельная теорема для момента максимума случайного блуждания, достигающего фиксированного уровня

Научный руководитель – Шкляев Александр Викторович

Анохина Мария Андреевна
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра математической статистики и случайных процессов, Москва, Россия
E-mail: anokhina.mary1@gmail.com

Рассмотрим случайное блуждание $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$, $S_0 = 0$, где $X_1, X_2, \ldots$ — н.о.р. (независимые одинаково распределенные) случайные величины (сл.в.). Пусть $\mathcal{A} := \{0 < \alpha < 1; |\beta| < 1\} \cup \{1 < \alpha < 2; |\beta| \le 1\} \cup \{\alpha = 1, \beta = 0\} \cup \{\alpha = 2, \beta = 0\} \subset \mathbb{R}^2$. Для $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$ и сл.в. X будем говорить, что $X \in \mathcal{D}(\alpha, \beta)$, если распределение X принадлежит области притяжения устойчивого закона с характеристической функцией

$$G_{\alpha,\beta}(t) := exp\left\{-c|t|^{\alpha}\left(1 - i\beta\frac{t}{|t|}\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right\}, \quad c > 0,$$

и, к тому же, $\mathbf{E}X = 0$, если оно существует. Если существует $0 < \rho < 1$ такое, что $\mathbf{P}(S_n > 0) \to \rho$, $n \to \infty$, то известен обобщенный закон арксинуса для момента достижения максимума блужданием S_n

$$\mathbf{P}\left(\frac{\tau_M}{n} \le x\right) \to \frac{\sin(\pi\rho)}{\pi}\int_0^x t^{-\rho}(1-t)^{\rho-1}\,dt, \quad n \to \infty, \quad x \in [0,1].$$

где τ_M — момент первого достижения максимума блужданием. Нас интересует распределение момента достижения максимума при условии фиксации самого значения максимума

$$\mathbf{P}\left(\frac{\tau_M}{n} \le x \,\middle|\, M_n = k\right), \quad x \in [0,1],$$

где $M_n = S_{\tau_M}$, $k \in \mathbb{N}$. Нас интересует случай, когда $k \approx \sqrt{n}$, $n \to \infty$, что соответствует нормальному закону. Сначала сформулируем более общий результат.

Теорема 1. Пусть X_i, $i = 1, \ldots, n$, — н.о.р. арифметические с.в. и $X_1 \in \mathcal{D}(\alpha, \beta)$. Пусть $L(n)$ — медленно меняющаяся на бесконечности функция, $c_n = n^{1/\alpha}L(n)$, $\{k_n\}$ – некоторая целочисленная последовательность, удовлетворяющая соотношению $k/c_n \to y > 0$, $n \to \infty$, $0 < a < b < 1$. Тогда при $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\left(\frac{\tau_M}{n} \in [a,b] \,\middle|\, M_n = k\right) \to \frac{\int_a^b p_{\alpha,\beta}\left(yt^{-1/\alpha}\right)t^{\rho-1-1/\alpha}(1-t)^{-\rho}\,dt}{\int_0^1 p_{\alpha,\beta}\left(yt^{-1/\alpha}\right)t^{\rho-1-1/\alpha}(1-t)^{-\rho}\,dt},$$

где $p_{\alpha,\beta}(x)$ — плотность соответствующего меандра Леви, а

$$\rho = \begin{cases} 1/2, & \alpha = 1; \\ 1/2 + \arctan(\beta\tan(\pi\alpha/2))/(\pi\alpha), & \text{иначе.} \end{cases}$$

В частности, при $\alpha = 2$ и $\beta = 0$ получаем предельную теорему в случае нормального закона.

Теорема 2. Пусть X_i, $i = 1, \ldots, n$, — н.о.р. арифметические с.в. с $\mathbf{E}X_1 = 0$ и $\mathbf{E}X_1^2 = \sigma^2 \in (0, \infty)$, $\{k_n\}$ — некоторая целочисленная последовательность, удовлетворяющая соотношению $k_n/\sqrt{n} \to y > 0$, $n \to \infty$, $0 < a < b < 1$. Тогда

$$\mathbf{P}\left(\frac{\tau_M}{n}\in[a,b]\middle| M_n=k_n\right)\to\frac{y}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_a^b\frac{e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}\left(\frac{1}{t}-1\right)}}{t\sqrt{t(1-t)}}\,dt,\quad n\to\infty.$$

Аналогичные результаты верны и в нерешетчатом случае для

$$\mathbf{P}\left(\frac{\tau_M}{n}\in[a,b]\middle| M_n\in[z_n,z_n+\Delta)\right),$$

где $z_n\in\mathbb{R}^+$, $\Delta>0$. Основным подходом к получению настоящих теорем является сведение их к локальным теоремам для условно положительного случайного блуждания, полученным в работах [1] и [2].

Источники и литература

1) V. A. Vatutin, Vitali Wachtel.*Local probabilities for random walks conditioned to stay positive*. Probability Theory Related Fields, 143:177–217, 2009.
2) V. Wachtel. *Local limit theorem for the maximum of asymptotically stable random walks*. Probability Theory Related Fields, 152:407–424, 2012.