Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

О дробных моментах неотрицательной случайной величины

Научный руководитель – Яровая Елена Борисовна

Кыльчик Сергей Витальевич
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: ser03.03@mail.ru

Хорошо известно, что из совпадения целых моментов (степенных моментов для всех натуральных показателей степени) у двух неотрицательных случайных величин не следует совпадения их распределений. В работе [1] показано, что, более того, при совпадающих целых моментах отношение полуцелых моментов (степенных моментов для нецелых показателей степени с дробной частью $1/2$) может стремиться к бесконечности, причем как угодно быстро. Целью данной работы является рассмотрение других дробных моментов (степенных моментов для нецелых показателей степени), не обязательно полуцелых, на вопрос того, насколько они могут отличаться для распределений, целые моменты которых совпадают. Удалось получить следующий результат: существуют положительные случайные величины X_1 и X_2, целые моменты которых совпадают при всех $n \in \mathbb{N}$, но для любого подотрезка $[a,b] \subset (0,1)$ верно, что $\lim_{n\to\infty} \left|\mathrm{E}X_2^{n+\varphi} - \mathrm{E}X_1^{n+\varphi}\right| = \infty$, причем равномерно по всем $\varphi \in [a,b]$. При доказательстве использовались случайные величины, плотности распределений которых задаются явно — $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-(\ln x)^2/2}, x > 0$ и $f_2(x) = f_1(x)\left(1 + \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\ln x\right)\right)$. Целые моменты приводимых случайных величин совпадают и вычисляются явно. Далее вычисляются дробные моменты, что аналогичным образом делается в [2], и оценивается их разность, причем равномерно по всем $\varphi \in [a,b]$. Полученный результат показывает, что даже при совпадении всех целых моментов, все дробные моменты могут расходиться на бесконечность друг от друга, причем эта расходимость может быть равномерной для всех моментов из любого подотрезка $[a,b]$ интервала $(0,1)$. Простым следствием из полученного результата является тот факт, что даже при совпадении моментов двух распределений на решетке со сколь угодно маленьким выбранным диаметром $\lambda > 0$, то есть когда $\mathrm{E}X_1^{\lambda n} = \mathrm{E}X_2^{\lambda n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, остальные дробные моменты распределений могут так же расходиться, причем так же равномерно по любому отрезку, не пересекающемуся с решеткой.

Источники и литература

1) Лыков, Константин Владимирович. "Некоторые замечания к проблеме моментов и ее связи с теорией экстраполяции пространств." Математические заметки 91.1 (2012): 79-92.
2) Стоянов, Йордан. Контрпримеры в теории вероятностей. Litres, 2022.