Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Выпуклые оболочки случайных блужданий

Научный руководитель – Яровая Елена Борисовна

Мыслюк Александр Олегович

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: sanya.mysliuk@mail.ru

В 1961 году в [1] была опубликована комбинаторная лемма Бакстера. Для формулировки леммы потребуется условие, налагаемое на конечное множество векторов. Пусть $\{Z_1, \ldots, Z_n\}$ — векторы на плоскости. $A = \{i_1, \ldots, i_k\}$, где $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$. $Z_A := \sum_{j=1}^{k} Z_{i_j}$. Если из коллинеарности Z_A и Z_B следует, что $A = B$, то будем говорить что наша система векторов удовлетворяет условию ($\mathbf{B}$). Комбинаторная лемма Бакстера формулируется следующим образом:

Лемма Бакстера [1, лемма 1]. *Пусть векторы $Z_1, \ldots, Z_n$ удовлетворяют ($\boldsymbol{B}$), $S_0 := 0$, $S_k := \sum_{j=1}^{k} Z_j$. Тогда существует ровно одна циклическая перестановка векторов $Z_1, \ldots, Z_n$, такая что $S_1, \ldots, S_{n-1}$ лежат справа (слева) относительно прямой $S_0 S_n$.*

Основной целью работы являлось обобщение и применение комбинаторной леммы Бакстера для случая произвольной размерности d, а также исследование выпуклых оболочек ветвящихся случайных блужданий с дискретным временем в $\mathbb{R}^d$.

Обобщим условие ($\mathbf{B}$) на случай произвольной размерности d. Пусть $B_1, \ldots, B_{d-1}$ — подмножества индексов $\{1, \ldots, n\}$, для которых $B_1 \subset \cdots \subset B_{d-1}$. Будем говорить, что векторы $Z_1, \ldots, Z_n$ удовлетворяют условию ($\mathbf{K}$), если:

1) векторы $Z_{B_1}, \ldots, Z_{B_{d-1}}$ линейно независимы;

2) для всякого подмножества индексов A, отличного от $B_1, \ldots, B_{d-1}$, верно, что $Z_A \neq Z_{B_i} - Z_{B_j}$ ни для каких $j \le i$, причём векторы $Z_A, Z_{B_1}, \ldots, Z_{B_{d-1}}$ линейно независимы.

Обобщение комбинаторной леммы формулируется следующим образом:

Теорема 1. *Пусть множество векторов $\{Z_1, \ldots, Z_n\}$ удовлетворяет условию ($\boldsymbol{K}$), $\{B = 0, i_1, \ldots, i_{d-2}, n\}$ — некоторый упорядоченный поднабор индексов. $A := \{Z_{i_k+1}, \ldots, Z_{i_{k+1}}\}$ для некоторого $0 \le k \le d-2$. Тогда существует ровно одна циклическая перестановка σ векторов из A, такая что ломанная, соединяющая точки S_{i_k} и $S_{i_{k+1}}$ будет полностью лежать в правом (левом) полупространстве относительно гиперплоскости Ω, проходящей через точки $\{0, S_{i_1}, \ldots, S_{i_{d-2}}, S_{i_n}\}$.*

Следствием этого обобщения является результат, позволяющий считать асимптотики математических ожиданий некоторых характеристик выпуклых оболочек. Пусть отображение $g(x_1, \ldots, x_{d-1})$ — симметрическое отображение $d-1$ переменных. Пусть набор индексов $i_0 < \cdots < i_{d-1}$ определяет некоторую грань D выпуклой оболочки H_n. Рассмотрим случайную величину $G_n = \sum_{D \in \partial H_n} g(S_{i_1} - S_{i_0}, S_{i_2} - S_{i_1}, \ldots, S_{i_{d-1}} - S_{i_{d-2}})$. Тогда соответствующая теорема формулируется следующим образом:

Теорема 2. *Пусть скачки $\{Z_1, \ldots, Z_n\}$ удовлетворяют условию ($\boldsymbol{K}$) для всякого n, тогда*

$$\mathsf{E}(G_n) = \sum_{1 \le M_1 < \dots < M_{d-1} \le n} \frac{2\,\mathsf{E}(g(S_{M_1}, S_{M_2} - S_{M_1}, \dots, S_{M_{d-1}} - S_{M_{d-2}}))}{M_1 \cdot (M_2 - M_1) \cdots (M_{d-1} - M_{d-2}).}$$

В работе показано, как с помощью теоремы 3 можно посчитать конкретные асимптотики выпуклых оболочек, а также получить некоторые оценки для случая ветвящегося случайного блуждания в $\mathbb{R}^d$. Например, для числа $(d-1)$-мерных граней ветвящегося случайного блуждания. Пусть в каждый момент времени n каждая частица может размножаться с некоторыми фиксированными вероятностями. Пусть A — первый момент соответствующего ветвящегося процесса $\mu(n)$. Тогда, верно следующее утверждение для E_n — числа $(d-1)$-мерных граней выпуклой оболочки случайного блуждания.

Утверждение. *Пусть скачки ветвящегося случайного блуждания Z_i^n независимы, одинаково распределены, п.н. удовлетворяют условию ($\boldsymbol{K}$), $A > 1$ конечен. Тогда существует $C > 0$, такая что $E_n < CL_n$, где*

$$L_{n+1} = AL_n + \ln^{d-1} n.$$

Будут приведены вспомогательные утверждения и описаны подходы к улучшению оценки.

Источники и литература

1) *Baxter G.* A combinatorial lemma for complex numbers // Ann. Math. Statist., **32** (1961), 901-904.
2) *Vysotsky V., Zaporozhets D.* Convex hulls of multidimensional random walks // Trans. Amer. Math. Soc., **370**:11 (2018), 7985-8012.