Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Экстремальное поведение линейных стохастических рекуррентных последовательностей. Случай лог-гиперэкспоненциального левого хвоста.

Научный руководитель – Лебедев Алексей Викторович

Железнов Николай Александрович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: nikolai070@yandex.ru

Рассмотрим процесс $Y_n, n \geq 1$, удовлетворяющий стохастическому разностному уравнению

$$Y_n = A_n Y_{n-1} + B_n, n \geq 1, Y_0 \geq 0, \tag{1}$$

где $(A_n, B_n), n \geq 1$, — независимые, одинаково распределенные пары неотрицательных случайных величин. Стационарные процессы такого вида при довольно общих условиях обладают двумя важными свойствами, относящимися к поведению их экстремумов: распределение Y_n имеет степенной хвост с показателем κ, называемым хвостовым индексом, а максимум $M_n = \max\{Y_1, ..., Y_n\}$ при $n \to \infty$ растет асимптотически, как максимум $[\theta n]$ независимых случайных величин с тем же распределением, где $\theta \in (0, 1]$ есть экстремальный индекс процесса Y_n (см. [1], гл. 3). Процессы (1) изучаются, начиная с работы [2]. В работе [3] доказана фундаментальная теорема об указанных индексах, позволяющая находить их в явном виде в некоторых частных случаях. С ее помощью, мы получаем новый результат, в случае левого лог-гиперэкспоненциального хвоста A_n. Для простоты, предполагаем, что условия теоремы на B_n выполняются.

Обозначим $Z_n = \ln A_n$. Пусть величина Z_1 имеет распределение с плотностью

$$p_Z(x) = \begin{cases} r(c_1\alpha_1 e^{\alpha_1 x} + c_2\alpha_2 e^{\alpha_2 x}), & x < 0 \\ (1-r)\beta e^{-\beta x}, & x \geq 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $c_1, c_2 \geq 0, c_1 + c_2 = 1$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta > 0$ и $0 < r < 1$.

Введем обозначение

$$D = ((1-rc_1)\alpha_1 + (1-rc_2)\alpha_2 - \beta r)^2 - 4((1-r)\alpha_1\alpha_2 - \beta r((1-c_1)\alpha_1 + (1-c_2)\alpha_2)).$$

Теорема. *Пусть величина Z_1 имеет распределение с плотностью (2). При $D \geq 0$ выполняются условия теоремы 1, и в явном виде можно вычислить κ и θ следующим образом: κ есть наибольший или единственный корень уравнения*

$$\kappa^2 + \kappa(\alpha_1 + \alpha_2 - r(\beta + c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2)) +$$
$$+((1-r)\alpha_1\alpha_2 - \beta r((1-c_1)\alpha_1 + (1-c_2)\alpha_2)) = 0,$$

а экстремальный индекс

$$\theta = r - \frac{\kappa - r\beta}{\kappa - \beta} - \frac{r\kappa(\beta - \kappa)}{\beta}\left(\frac{c_1\alpha_1}{(\alpha_1+\kappa)^2} + \frac{c_2\alpha_2}{(\alpha_2+\kappa)^2}\right).$$

Далее более подробно изучено поведение индексов в интересном частном случае

$$\beta = 1, r = 1/2, c_1 = c_2 = 1/2, \alpha_1 = \frac{\alpha}{1+\varepsilon}, \alpha_2 = \frac{\alpha}{1-\varepsilon},$$

где $0 < \varepsilon < 1$, $0 < \alpha < 1$.