Предельные теоремы для докритических процессов Беллмана-Харриса с долгим временем жизни частиц и дважды стохастической пуассоновской иммиграцией

Научный руководитель – Лебедев Алексей Викторович

Малиновский Георгий Андреевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: goga_malinov@mail.ru

Рассматриваются докритические процессы Беллмана-Харриса с долгим временем жизни частиц и дважды стохастической пуассоновской иммиграцией. Предполагается, что времена жизни частиц имеют степенные хвосты с показателем меньше единицы, что приводит к бесконечным средним временам жизни. Предполагается также, что входной поток иммиграции частиц имеет случайную интенсивность, описываемую стационарным процессом с корреляционной функцией, ограниченной убывающей степенной функцией. Доказаны закон больших чисел и центральная предельная теорема. Разобран пример с устойчивым распределением времени жизни.

В систему поступает дважды стохастический пуассоновский поток частиц со случайной интенсивностью $\lambda(t)$. Считаем, что $\mathsf{E}\lambda(t) = \lambda < \infty$. Каждая частица находится в системе случайное время. По истечении этого времени она исчезает, оставляя после себя случайное число потомков. Каждая вновь появившаяся частица эволюционирует таким же образом независимо от других. Введём $\rho(t) = \int\limits_0^t \overline{G}(u)du$ и обозначим $M(t)$ — среднее число потомков одной частицы за время t.

Условие 1. Для некоторых положительных постоянных α, c_0 имеет место неравенство для всех $x \geq 0$ $|r(x)| = |\mathsf{cov}(\lambda(0), \lambda(x))| \leq c_0(1+x)^{-\alpha}$. Также будем предполагать, что для функции распределения продолжительности жизни частиц $G(t)$ выполнены следующие условия:

Условие 2. Существуют $0 < \beta < 1, c > 0$ такие, что $\overline{G}(t) \sim \frac{c}{t^\beta}, t \to \infty$. **Условие 3**. Математическое ожидание числа потомков частицы m_1 удовлетворяет неравенству $0 < m_1 < 1$.

Теорема 1 Если выполнены условия 1-3, и $\alpha > 2\beta - 1$, то при $t \to \infty$ имеет место сходимость $X(t)/\rho(t) \xrightarrow{\mathsf{P}} \lambda(1-m_1)^{-1}$.

Теорема 2 Если выполнены условия 1-3 и при этом $\alpha > \mathsf{max}(\beta, 1-\beta), m_2 < \infty$, то при $t \to \infty$ имеет место слабая сходимость $(X(t) - \lambda M(t))/\sqrt{\rho(t)} \to N(0, \lambda(1-m_1)^{-1})$.

Пример Если выполнены условия 1-3, $\alpha > \frac{1}{2}, m_2 < \infty$ и распределение G является односторонним устойчивым с параметром $\frac{1}{2}$, то при $t \to \infty$ имеет место слабая сходимость $(X(t) - \frac{2\sqrt{2}\lambda}{\pi(1-m_1)}\sqrt{t})/t^{1/4} \to N(0, \frac{2\sqrt{2}\lambda}{\pi(1-m_1)})$.

Источники и литература

1) Ватутин В. А., Топчий В. А. Критические ветвящиеся процессы Беллмана–Харриса с долго живущими частицами // Труды МИАН. 2013. 282:257–287.

2) Чистяков В.П. Теорема о суммах независимых положительных случайных величин и ее приложения к ветвящимся случайным процессам, Теория вероятн. и ее примен., 9:4 (1964), 710–718

3) Harris. T. E. The Theory of Branching Processes // Springer-Verlag. 1963. P. 121-163.

4) Jagers P., Age-dependent branching processes allowing immigration // Теория вероятн. и ее примен., 13:2 (1968), 230–242.