Секция «Теория упругости»

Численное исследование свободных колебаний упругого тела вращения

Алгазин С.Д.[1], *Синицын А.А.*[2]

1 - Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия, *E-mail: algazinsd@mail.ru*; 2 - Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра теории упругости, Москва, Россия, *E-mail: art@sinitsyn.info*

Рассматривается тело вращения, методика отрабатывается на простейшем граничном условии защемления. Другие граничные условия будут рассмотрены позднее. Рассматриваемое тело вращения является трехмерной задачей по расчету свободных колебаний первой краевой задачи теории упругости в теле вращения. Доступно для вычисления сетка из 900 узлов и получены результаты: собственные частоты совпадают с одномерным тестом с 3-7 цифрами после запятой.

В векторном уравнении свободных колебаний теории упругости для однородной изотропной среды:

$$\Delta \overrightarrow{u} + \omega \; grad \; div \; \overrightarrow{u} + \lambda^2 \overrightarrow{u} = 0, \; \lambda^2 = \frac{p\overline{\omega}^2}{\mu}, \; x \in \Omega, \tag{1}$$

где $\omega = (1-2\sigma)^{-1}$ и σ – постоянная Пуассона, ρ – плотность, $\overline{\omega}$ – частота колебаний, μ – модуль сдвига. Ставится задача: исследовать спектр оператора в левой части уравнения (1) при краевых условиях первой задачи:

$$\overrightarrow{u}|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

Здесь Ω тело вращения вокруг оси (O, x_3), $x = (x_1, x_2, x_3)$, G – его меридиональное сечение.

При всех конечных значениях ω, кроме $\omega = -1$, оператор $\Delta^* = \Delta + \omega \; grad \; div$ эллиптичен. Следовательно, решения первой краевой задачи теории упругости достаточно гладкие. Чтобы воспользоваться этой гладкостью построен метод дискретизации первой краевой задачи теории упругости, не имеющий насыщения [1, 2].

Введем систему криволинейных координат (r, θ, ϕ), связанную с декартовыми координатами (x_1, x_2, x_3) соотношениями:

$$x_1 = v(r,\theta) cos\phi, \; x_2 = v(r,\theta) sin\phi, \; x_3 = u(r,\theta). \tag{3}$$

Обозначим G область, получаемую меридиональным сечением тела Ω, и выберем функции u и v следующим образом. Пусть $\psi = \psi(z)$, $\psi = u + iv$, $z = r \; exp(i\theta)$ – конформное отображение круга на внутренность области G. Удобно считать (r, θ, ϕ), сферическими координатами, тогда соотношения (3) задают отображение шара единичного радиуса на внутренность тела Ω. Поверхность шара единичного радиуса переходит при отображении (3) в поверхность тела Ω. Тогда краевые условия, заданные на $\partial\Omega$, переносятся на поверхность шара.

Наиболее распространенным в настоящее время методом решения задач механики деформируемого твердого тела является метод конечных элементов. Его недостатки общеизвестны: аппроксимируя перемещение кусочно-линейной функцией получается, что напряжения разрывные. Вместе с тем следует заметить, что большинство задач механики деформируемого твердого тела описывается уравнениями эллиптического типа, которые имеют гладкие решения. Представляется актуальным разработать алгоритмы, которые учитывали бы эту гладкость. Идея таких алгоритмов принадлежит К. И. Бабенко [1]. Эта идея высказана им в начале 70-х годов прошлого века. Многолетнее применение этой методики в эллиптических задачах на собственные значения первым автором настоящей работы доказали их высокую эффективность [1]. Например рассматривалась задача на собственные значения для нулевого уравнения Бесселя, на сетке из 23 узлов первое собственное значение этой задачи определено с 28 знаками после запятой. В отличие от классических разностных методов и метода конечных элементов, где зависимость скорости сходимости от числа узлов сетки степенная, здесь имеем экспоненциальное убывание погрешности.

Расчеты проводились для шара и области близкой к шару с эпитрохоидой в меридиональном сечении (для задач 2 и 3, конформное отображение задается формулой $\psi(z) = z(1+\epsilon z^{n_p})$, где $n_p = 4$, $\epsilon = 1/6$, для задачи 2 и $n_p = 12$, $\epsilon = 1/16$ для задачи 3) на сетке из $900 = 10{\times}10{\times}9$ узлов. Таким образом размер решаемой спектральной задачи $2700{\times}2700$. Результаты расчетов представлены в таблице. В первой колонке таблицы указан номер действительного собственного значения для шара, во второй колонке приведены простые собственные значения для шара, сохранено количество знаков, совпавшее с одномерным тестом [1, стр. 720], в 3-ей и 4-ой колонках приведены простые собственные значения для возмущенного шара, $\sigma = 0.25$. Из таблицы мы видим, что собственные значения методом МКЭ (метод конечных элементов) определяются с большой погрешностью (не менее 10%).

Таблица. Результаты расчета простых частот λ^2 для шара и областей, близких к шару, $\sigma = 0.25$.

№	Шар	Ball МКЭ (240)	Эпитрохоида $n_p = 4$, $\epsilon = 1/6$	Эпитрохоида $n_p = 12$, $\epsilon = 1/16$
4	20.19072854	22.53544	18.4696406693752	20.5137012323477
30	59.6795	54.03551	58.6037971034038	54.5883426026319
79	118.902	117.035785	118.350831138150	109.895709114932
136	197.852	204.037019	192.040762581846	194.761657499711

Определение собственных значений методом конечных элементов выполняется в коммерческом коде ANSYS. Для моделирования использовались двумерные квадратичные изопараметрические элементы PLANE183 [3] в осесимметричной формулировке. Граничные условия и уравнения связи обеспечивали только радиальные центрально-симметричные волновые формы. Количество радиальных разбиений на конечные элементы варьировалось. Рассматривались модели с 60, 120 и 240 делениями по радиусу.

Таким образом, на сетке из 900 узлов возможно определить первые собственные частоты шара и области близкой к шару с 3-7 знаками после запятой. Такой эффект достигнут применением метода без насыщения для решения спектральной задачи.

Источники и литература

1) Бабенко К. И. Основы численного анализа. - М.: Наука, 1986. - 744 с.; Второе издание, исправленное и дополненное, под редакцией А. Д. Бруно. Москва -Ижевск: КОД, 2002. - 847 с.

2) Алгазин С. Д. Численные алгоритмы без насыщения в классических задачах математической физики. Издание 4 переработанное. М.: "URSS", 2019, 216 с. ISBN 978-5-9710-4956-2

3) Release 16.2 Documentation for ANSYS [electronic document] / ANSYS Inc. Electronic data and software (104019 files: 10660130531 bytes).