Достаточное условие голоморфности для квазианалитических функций

Тимофеева Карина Витальевна

Аспирант

Факультет математики и ИТ ДонГУ, Донецк, Россия

E-mail: timofeeva_karina00@mail.ru

Научный руководитель — *Волчков Валерий Владимирович*

Всюду в дальнейшем u, v – вещественные функции, заданные в области Ω на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Известная теорема Дзядыка о геометрическом описании голоморфных функций утверждает, что если $u, v \in C^1(\Omega)$, то для того чтобы хотя бы одна из функций $u + iv, u - iv$ была голоморфна в Ω, необходимо и достаточно, чтобы площади поверхностей графиков функций $u, v, \sqrt{u^2 + v^2}$, расположенные над любым компактным подмножеством из Ω, были равны [1]. Теорема Дзядыка получила дальнейшее развитие и уточнение в работах других авторов [2]-[4].

В данной работе получен аналог теоремы Дзядыка для некоторых квазианалитических классов функций. При этом предполагается равенство площадей лишь над всеми замкнутыми единичными квадратами, содержащимися в рассматриваемой области.

Пусть $\mathcal{M} = \{M_k\}_{k=0}^{\infty}$ – возрастающая последовательность положительных чисел, такая что $M_0 = 1$ и

$$M_{k+1} \leq C M_k$$

для некоторой постоянной $C > 0$, не зависящей от k. Обозначим через $C^{\mathcal{M}}(\Omega)$ множество всех функций $f \in C^{\infty}(\Omega)$, таких что для любого компактного множества $E \subset \Omega$ выполнены неравенства

$$\max_E \left| \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2} f}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}} \right| \leq C_E \big(C_E M_{\alpha_1+\alpha_2}\big)^{\alpha_1+\alpha_2}$$

для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}_+$ и некоторой константе $C_E = C_E(f) > 0$, не зависящей от α_1, α_2.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{M_k} = +\infty$$

и что область $\Omega \subset \mathbb{C}$ является объединением замкнутых кругов радиуса $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Для любой функции $f \in C^1(\Omega)$ и компактного множества $A \subset \Omega$ символом $S(f, A)$ обозначим площадь поверхности графика f, расположенной над A.Обозначим также символом $\mathcal{D}_\Omega$ множество всех пар u, v функций в Ω, таких что хотя бы одна из функций $u + iv, u - iv$ голоморфна в Ω.

Теорема 1. *Пусть $u, v \in C^{\mathcal{M}}(\Omega)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha\beta \neq 0$ и $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Пусть также*

$$S(u, K) = S(v, K) = S(\alpha u + \beta v, K)$$

для любого замкнутого единичного квадрата $K \subset \Omega$.

Тогда $(u, v) \in \mathcal{D}_\Omega$.

Стоит отметить, что условие на область Ω убрать нельзя, поскольку для произвольных областей теорема неверна.

Литература

1. Дзядык В. К. Геометрическое определение аналитических функций // УМН. 1960. Т. 15, Вып. 1(91). С. 191–194.
2. Goodman A. On the criterium of analytical function // Amer. Math. Monthly, 1964, V.71. P. 265–267.
3. Трохимчук Ю.Ю. Об одном критерии аналитичности функций // Укр. мат. журн. 2007. Т. 59, № 10. С. 1410–1418.
4. Volchkov V.V. Integral geometry and convolution equations // Dordrecht: Kluwer. 2003. 454 p.