Слоение Лиувилля изоэнергетической поверхности биллиардной книжки с проскальзыванием, содержащей фокусы

Научный руководитель – Ведюшкина Виктория Викторовна

Ткаченко Даниил Андреевич

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия

E-mail: tkachenkodanya@gmail.com

Рассмотрим семейство софокусных квадрик, заданных следующим уравнением:

$$(b-\lambda)x^2 + (a-\lambda)y^2 = (b-\lambda)(a-\lambda),$$

где $a > b > 0$ – параметры семейства.

Согласно Дж.Д.Биркгофу биллиард в эллипсе интегрируем: звенья траектории лежат на прямых, касательных к некоторой квадрике (эллипсу или гиперболе), принадлежащей тому же софокусному семейству, что и граничный эллипс. А.Т. Фоменко ввёл новый класс биллиардов – так называемые *биллиарды с проскальзыванием.* Пусть точка после удара о границу эллипса не только отражается, но и “проскальзывает“ вдоль границы на половину её длины. Так определённая система останется интегрируемой.

В работе мы рассматриваем обобщение данной системы: биллиардную книжку с проскальзыванием.

Рассмотрим на плоскости $2k$, $k \in \mathbb{N}$, половинок эллипса, содержащих фокусы. Занумеруем их числами от 1 до $2k$ включительно. На парах $(1\,2), \ldots, (2k-1\ 2k)$ половинок зададим проскальзывание по эллиптическим дугам. Склеим все эти области по эллиптическим дугам и вырожденной гиперболе. Получим CW-комплекс. Сопоставим одномерной эллиптической клетке перестановку $\pi = (1\,2)(3\,4)\ldots(2k-1\ 2k)$, а одномерной гиперболической клетке – перестановку $\sigma = (1\,3\,5\ldots 2k-1\ 2\,4\,6\ldots 2k)$. Полученная биллиардная книжка с проскальзыванием также интегрируема. Целью настоящей работы является изучение слоения Лиувилля изоэнергетической поверхности данного биллиарда.

Утверждение. Траектории, проходящие через фокус семейства квадрик, лежат на особом слое, гомеоморфном особому слою 3-атома B в случае чётного k и атома C_2 в случае нечётного k.

Из утверждения следует

Теорема. Грубая молекула Фоменко, кодирующая слоение Лиувилля, изображена на рис. 1a при чётном k и на рис. 1b при нечётном k.

Источники и литература

1) Фоменко А. Т. Болсинов А. В. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том I. - Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999. - 444 С.
2) Liouville Foliations of Topological Billiards with Slipping / Fomenko A.T., Vedyushkina V.V., Zav’yalov V.N. // Russian Journal of Mathematical Physics. - 2021. - N. 28 - C. 37-55.

Иллюстрации

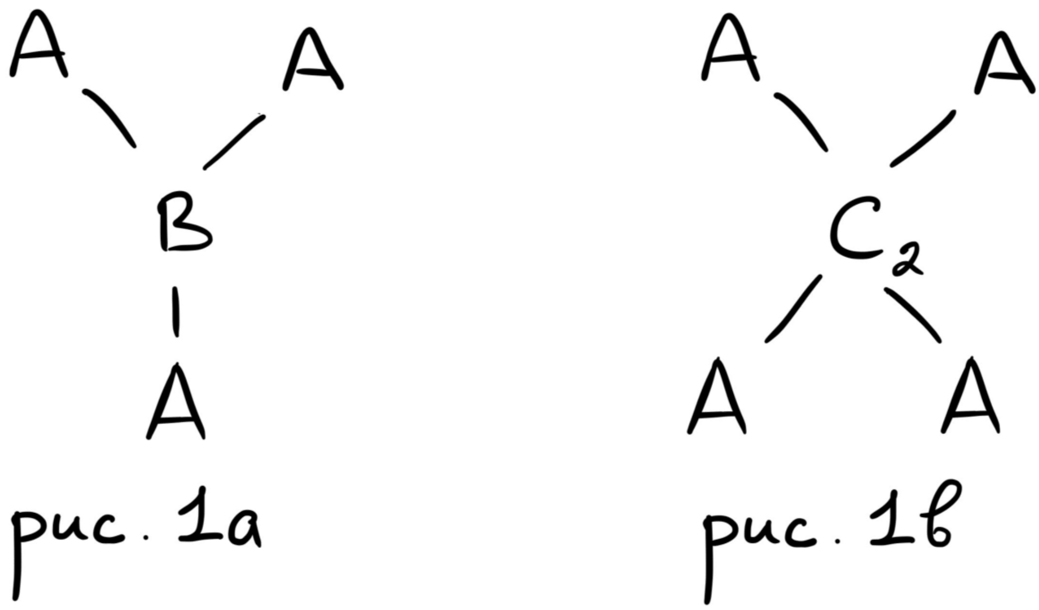

Рис. : Грубая молекула Фоменко