Секция «Геометрия и топология»

Классификация алгебр Ли с четырехмерными орбитами, представимых в виде полупрямой суммы полупростой алгебры Ли и разрешимого идеала

Научный руководитель – Ошемков Андрей Александрович

Лобзин Фёдор Игоревич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия

E-mail: fiadat@mail.ru

Важнейшим примером пуассонова многообразия является аффинное пространство Π с заданным на нем, тензорным полем π^{ij}, удовлетворяющим свойствам:

$$\pi^{jk}(x) = -\pi^{kj}(x),$$

$$\pi^{jk}\partial_k \pi^{lm} + \pi^{lk}\partial_k \pi^{mj} + \pi^{mk}\partial_k \pi^{jl} = 0.$$

Простейшим примером такого тензора является тензор, не зависящий от координат, однако изучение свойств подобного пуассонова многообразия сводится к простым задачам линейной алгебры. Следующим по сложности и важным примером такого тензора является тензор, линейно зависящий от x^k — координат на Π:

$$\pi^{ij} = c_k^{ij} x^k. \tag{1}$$

Тогда для тензора c_k^{ij} условия, выписанные ранее, переписываются в виде:

$$c_k^{ij} = -c_k^{ji},$$

$$c_e^{ad} c_d^{bc} + c_e^{bd} c_d^{ca} + c_e^{cd} c_d^{ab} = 0.$$

Отсюда видно, что любую линейную пуассонову структуру можно интерпретировать, как тензорное поле на $\mathfrak{g}^*$ — пространстве сопряженном некоторой алгебре Ли $\mathfrak{g}$, со структурными константами из формулы (1).

Такой подход рассмотрен, например, в книге В. И. Арнольда [1]. Симплектические слои такого пуассонова многообразия совпадают с орбитами коприсоединенного представления. Иными словами, механическая система с n степенями свободы при таком подходе описывается алгеброй Ли, у которой орбиты коприсоединенного представления общего положения имеют размерность $2n$. Этот факт вызывает интерес к построению алгебр Ли с орбитами определённых размерностей, их классификации и изучению свойств получившихся интегрируемых систем.

Простейший случай среди интегрируемых систем — это системы с одной степенью свободы. Они моделируются алгебрами Ли с двумерными орбитами коприсоединенного представления общего положения. Полная классификация таких алгебр Ли проведена в [2], где также приводятся ссылки на работы, посвященные конкретным интегрируемым системам, соответствующим этим алгебрами. В работе [3] изучена топология орбит общего положения в алгебрах из списка из основной теоремы из [2].

Доклад посвящен следующему по сложности и важному случаю интегрируемых систем с двумя степенями свободы. Такие системы моделируются алгебрами Ли с четырехмерными орбитами коприсоединенного представления общего положения. Полная классификация

таких алгебр Ли может быть полезна для решения различных задач теории интегрируемых систем, например, для построения полных биинволютивных наборов многочленов и проверки обобщенной гипотезы Мищенко–Фоменко, сформулированной в [4], или для построения геодезических потоков на орбитах коприсоединенного представления с использованием конструкции, предложенной в [5]. В частности, в работе [6] рассматриваются примеры алгебр Ли с двумерными и четырехмерными орбитами коприсоединенного представления с рациональными инвариантами в контексте конструкции из [5].
Результаты о классификации алгебр Ли с четырехмерными орбитами коприсоединенного представления общего положения, полученные автором, основаны на известной теореме Леви, согласно которой любая алгебра изоморфна полупрямой сумме полупростой алгебры и разрешимого идеала. В данной статье рассматривается случай полупрямой суммы нетривиальной полупростой алгебры с некоторым разрешимым идеалом. Для завершения классификации остается рассмотреть случай разрешимых алгебр Ли, который будет разобран в последующих работах автора.

Источники и литература

1) Арнольд В. И., Математические методы классической механики
2) Коняев А. Ю., Классификация алгебр Ли с орбитами коприсоединенного представления общего положения размерности 2 // Матем. сб. 2014 Т. 205 С. 47-66.
3) Fomenko A. T., Konyaev A. Y., Geometry, dynamics and different types of orbits // J. Fixed Point Theory Appl. 2014. Vol 15. P. 49-66.
4) Bolsinov A. V., Zhang P., Jordan–Kronecker invariants of finite-dimensional Lie algebras // Transformation Groups. 2016. Vol. 21, P. 51–86.
5) Galinski A., Some metrics admitting nonpolynomial first integrals of the geodesic equation // Physics Letters B. 2021. Vol. 820. P.634050
6) Agapov S., Shubin V., Rational integrals of 2-dimensional geodesic flows: new examples // Journal of Geometry and Physics. 2021. Vol. 170. P. 104389.