Секция «Геометрия и топология»

Динамика материальной точки на евклидовых симплексах

Научный руководитель – Фоменко Анатолий Тимофеевич

Кузнецова Ирина Сергеевна
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: irina.kuznetcova@math.msu.ru

Как правило, на многогранниках геодезический поток не рассматривают с точки зрения интегрируемости, так как поведение движущейся точки в вершинах, вообще говоря, корректно не определено. Однако, есть класс выпуклых многогранников, допускающих корректное доопределение траектории частицы, попавшей в вершину. К их числу относятся правильный тетраэдр, а также произвольный тетраэдр, у которого сумма углов при каждой вершине равна π. В таком случае, траектории, не проходящие через вершины многогранника, будут являться локально-кратчайшими, т.е. геодезическими, а при попадании в вершину их можно считать биллиардными траекториями, поведение которых определяется по плоской развертке. Более того, мы показали, что других подходящих выпуклых многогранников не существует.

Теорема 1. *Пусть W — выпуклый многогранник, допускающий корректное доопределение биллиардных траекторий (на плоской развертке), попадающих в его вершины. Тогда W является тетраэдром, у которого сумма плоских углов в его вершинах равна π.*

Поскольку сумма углов при вершинах таких тетраэдров равна π, то мы можем замостить плоскими развертками многогранника всю плоскость и рассматривать траекторию движущейся частицы как прямую в $\mathbb{R}^2$. В таком случае угол пересечения прямой-траектории с ребрами тетраэдра при развертке остается постоянным, то есть является дополнительным первым интегралом. Его область значений — окружность. Оказывается, данная динамическая система является интегрируемой по Лиувиллю (в кусочно-гладком смысле).

Теорема 2. *Пусть W — выпуклый многогранник, допускающий корректное доопределение траекторий, попадающих в его вершины, как биллиардных траекторий. Тогда дополненный таким образом геодезический поток на нем является вполне интегрируемым по Лиувиллю.*

Регулярные слои возникающего слоения Лиувилля являются двумерными торами. При этом, критических уровней у этой системы нет. Поэтому изоэнергетическое 3-многообразие является расслоением над окружностью со слоем 2-тор.