Секция «Геометрия и топология»

Топологический анализ псевдоевклидовой системы Жуковского: осесимметричный и общий случай

Научный руководитель – Кибкало Владислав Александрович

Якимова Екатерина Сергеевна
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: agureevamath@yandex.ru

Расширение топологической классификации, предложенной А.Т. Фоменко [1], на интегрируемые системы с некомпактными слоями или неполными потоками гамильтоновых полей представляет собой актуальную задачу, поскольку охватывает достаточно широкий класс систем, встречающихся в геометрии, а также в приложениях. Одним из интересных примеров является работа А.В. Борисова и И.С. Мамаева [2], в которой предложили замену координат в фазовом пространстве $R^6(J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3)$, сохраняющую вещественной скобку Пуассона и первые интегралы для множества известных интегрируемых систем, таких как системы Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Жуковского, а также для ряда других.

$$x_1 \to ix_1, \quad x_2 \to ix_2, \qquad J_1 \to iJ_1, \quad J_2 \to iJ_2, \qquad J_3 \to J_3, \quad x_3 \to x_3$$

В рамках исследования изучается фазовая топология аналога системы Жуковского (обобщения системы Эйлера, описывающей движение твердого тела с главными моментами инерции A_1, A_2, A_3 с зафиксированным центром масс). В отличие от системы Эйлера, система Жуковского имеет гиростатический момент $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, что усложняет характер движения тела. Рассматриваемая система определяется параметрами: моментами инерции A_i и компонентами гиростатического вектора λ_i. Вдоль фазовых траекторий системы сохраняются функции Казимира, такие как $f_1 = a$, $f_2 = b$, гамильтониан $H = h$ и первый интеграл $K = k$:

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = a, \qquad f_2 = x_1J_1 + x_2J_2 - x_3J_3 = b,$$

$$H = \frac{(J_1 - \lambda_1)^2}{2A_1} + \frac{(J_2 - \lambda_2)^2}{2A_2} - \frac{(J_3 - \lambda_3)^2}{2A_3} = h, \qquad K = J_1^2 + J_2^2 - J_3^2 = k.$$

Осесимметричный случай аналога системы Жуковского $A_1{=}A_2 \neq A_3$ был изучен в работе [3] автора и В.А.Кибкало. Получено подробное описание системы: найдено критическое множество, проверена невырожденность его точек, вычислены аналоги инвариантов Фоменко для неособых изоэнергетических и изоинтегральных поверхностей, описано расположение бифуркационной кривой на плоскости значений отображения момента в зависимости от значений параметров системы.

С учетом полученного ранее описания типов особенностей осесимметричной системы, значительный интерес представляет изучение общего случая. Такой переход осложняется уже на этапе нахождения точек возврата параметрической кривой и вычисления их координат в зависимости от значений физических параметров системы, поскольку степень по t решаемого уравнения растет по сравнению с осесимметричным случаем.

Одним из возможных подходов является поиск соотношений между моментами инерции, позволяющих явно выразить искомые зависимости. Если описанное подмножество наборов параметров образует всюду плотное множество, то из свойств отвечающих им особенностей может быть получен результат и об остальных случаях. В частности, при небольших отклонениях от осесимметричного случая (когда моменты инерции остаются близкими) в силу устойчивости сохраняется характер невырожденных и вырожденных особенностей.

В докладе будут представлены результаты по изучению псевдоевклидовой системы Жуковского в представленных направлениях.

Благодарности. Автор является стипендиатом Фонда “Базис”.

Источники и литература

1) А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко, “Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация”, Изд. дом "Удмуртский университет", Ижевск, 1999.
2) A. V. Borisov, I. S. Mamaev, “Rigid Body Dynamics in Non-Euclidean Spaces”, Russ. J. Math. Phys., 23:4 (2016), 431–454.
3) Е.С. Агуреева, В.А. Кибкало, “Топологический анализ осесимметричной системы Жуковского в случае алгебры Ли $e(2,1)$” Вестник Моск. ун-та. Сер.1. Матем. Механ., 2024, № 5, 3–16