Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

О задаче Неймана для p-лапласиана в неограниченных областях

Научный руководитель – Коньков Андрей Александрович

Бровкин Вадим Вадимович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальных уравнений, Москва, Россия
E-mail: brovvadim2015@gmail.com

Пусть x_1, ..., x_n — декартова система координат в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Рассмотрим сферические координаты r, θ, θ^1, ..., θ^{n-2}, сопоставляя каждой точке $P \in \mathbb{R}^n$ длину $r(P)$ её радиус-вектора, угол $\theta(P) \in [0, \pi]$ между радиус-вектором и положительным направлением оси Ox_n и $\tilde{\theta}(P) = (\theta^1(P), \dots, \theta^{n-2}(P))$ — локальные координаты на единичной $(n-2)$-мерной сфере S_{n-2}.

Пусть $\Theta : [r_0, +\infty) \to (0, \pi)$ — функция класса $C^1[r_0, +\infty)$, $r_0 > 0$, такая, что

$$A_1\Theta(x_1) \leqslant \Theta(x_2) \leqslant A_2\Theta(x_1) \quad \text{при } r_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant 2x_1,$$

где $A_1 \in (0, 1]$ и $A_2 \in [1, \infty)$ — некоторые постоянные. Предположим, что $M \subset \mathbb{R}^n$ — область с границей класса C^1, причем $M = \Omega_0 \cup \mathcal{M}$, где $\mathcal{M} = \{(r, \theta, \tilde{\theta}) : r \in [r_0, +\infty),\ \theta \in [0, \Theta(r)),\ \tilde{\theta} \in S_{n-2}\}$, а область Ω_0 содержится в шаре $B_{r_0} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r_0\}$. Обозначим $R(r) = r\Theta(r)$, $r \geqslant r_0$.

Рассмотрим задачу

$$\Delta_p u = f \quad \text{в } M, \qquad |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\partial M} = h, \qquad \int\limits_M |\nabla u|^p \, dV < \infty, \tag{1}$$

где Δ_p, $1 < p < n$, — оператор p-Лапласа-Бельтрами, ν — вектор внешней нормали к ∂M, а f и h — обобщенные функции из $\mathcal{D}'(M)$, причем $\operatorname{supp} h \subset \partial M$. Решение задачи (1) будем понимать в обобщенном смысле [1].

Для всех $l \in \mathcal{D}'(\Omega)$, где Ω — открытое подмножество M, обозначим

$$N_\Omega(l) = \sup_{\varphi \in C_0^\infty(\Omega),\, \|\varphi\|_{L_p^1(\Omega)} = 1.} |(l, \varphi)|,$$

где $\|\varphi\|_{L_p^1(\Omega)}$ — полунорма в пространстве $L_p^1(\Omega)$ [2].

Теорема 1. *Пусть*

$$\varlimsup_{r \to \infty} \frac{r^{p-1}}{R^{n-1}(r)} \int\limits_{r_0}^{r} \frac{R^{n-1}(t)}{t^p} \, dt < \infty.$$

Тогда для существования решения задачи (1) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{k=1}^{\infty} N_{\Omega_k}^{p/(p-1)}(f - h) < \infty,$$

где $\Omega_1 = \{(r, \theta, \tilde{\theta}) \in M : r \in [0, 4r_0)\}$, $\Omega_k = \{(r, \theta, \tilde{\theta}) \in M : r \in (2^{k-1}r_0, 2^{k+1}r_0)\}$, $k \geqslant 2$.

Источники и литература

1) Бровкин В.В., Коньков А.А. О существовании решений второй краевой задачи для p-лапласиана на римановых многообразиях // Матем. заметки. 2021. Т. 109. No. 2. С. 180–195.
2) Мазья В.Г. Пространства С.Л. Соболева. Л.: Изд–во ЛГУ, 1985.