Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Применение метода Пикара к решению задачи Коши для некоторых дробных дифференциальных уравнений

Научный руководитель – Асташова Ирина Викторовна

Антонов Никита Андреевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальных уравнений, Москва, Россия

E-mail: antonovna@my.msu.ru

Аннотация. В работе применяется метод Пикара к решению задачи для ряда уравнений с дробной производной типа Атаньяны-Балеану. Построена схема вычисления последовательных приближений решения и доказана её сходимость.

Введение

Дифференциальные уравнения с дробными производными хорошо описывают происходящие физические процессы [1], [6], [11]. Детально теория дробного исчисления приводится в [1], [6], [10], [12]. Обзор методов решения подобных дифференциальных уравнений приведен в [1], [10–12].

В последние годы были введены некоторые новые определения дробных производных на основе ядер соответствующих интегральных операторов без сингулярностей: производная Капуто-Фабрицио и ее обощённый вариант — производная Атаньяны-Балеану [4], [14]. Важность этих производных объясняется тем, что ряд моделей, описывающих тепловые процессы, не могут быть описаны с помощью классических дробных дифференциальных операторов [4–5], [8], в то время как свойства производных Атаньяны-Балеану являются более подходящими для этого [2–3].

В работе рассматривается метод последовательных приближений Пикара для построения решения соответствующей задачи Коши [7], [13]. С его помощью можно найти решения для некоторых нелинейных дифференциальных уравнений дробного порядка, задействуя меньше вычислений, оставясь при этом достаточно точным. Одним из таких уравнений является уравнение Риккати, имеющее большое значение при решении задач Гросса–Питаевского, Бюргерса–Кортевега-де-Фриза, Рамануджана и ряда других [9].

Определение 1. Пусть $v \in H^1(a,b)$ и $0 < \alpha < 1$. Тогда *оператором дробного дифференцирования Атаньяны-Балеану в смысле Капуто* называется

$$(T^\alpha v)(x) = \left({}^{ABC}D^\alpha_{a+} v\right)(x) = \frac{\beta(\alpha)}{1-\alpha} \int_{a+}^{x} v'(s) E_\alpha \left[\frac{-\alpha}{1-\alpha} (x-s)^\alpha \right] * \mathrm{d}s, \quad a < x < b,$$

где $\beta(\alpha)$ — такая нормирующая функция, что $\beta(0) = \beta(1) = 1$, и $E_\alpha(x)$ — функция Миттаг-Леффлера.

Определение 2. Пусть $v \in L^1(a,b)$. Тогда *оператором дробного интегрирования Римана-Лиувилля* называется

$$\left({}^{RL}I^\alpha_{a+} v\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a+}^{x} v(s)(x-s)^{\alpha-1} \mathrm{d}s.$$

Определение 3. Пусть $v \in L^1(a,b)$. Тогда *оператором дробного интегрирования Атаньяны-Балеану* называется

$$\left({}^{AB}I^{\alpha}_{a+}v\right)(x) = \frac{1-\alpha}{\beta(\alpha)}v(x) + \frac{\alpha}{\beta(\alpha)}{}^{RL}I^{\alpha}_{a+}v(x).$$

Лемма 1. *Для дробной производной Атаньяны-Балеану в смысле Капуто справедлива формула Ньютона-Лейбница:*

$$\left({}^{AB}I^{\alpha}_{a+}\left({}^{ABC}D^{\alpha}_{a+}v\right)\right)(x) = v(x) - v(a).$$

Постановка задачи

Для $v \in H^1(0,1)$ рассмотрим задачу Коши:

$$T^{\alpha}v(x) = g(x, v(x)), \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < x < 1, \quad v(0) = \mu. \tag{1}$$

Метод Пикара

Применив оператор ${}^{AB}I^{\alpha}_{a+}$ к левой и правой частям уравнения (1), получим

$$v(x) - \mu = {}^{AB}I^{\alpha}_{a+}g(x, v(x)). \tag{2}$$

Введём последовательные приближения Пикара для уравнения (2):

$$v_{m+1}(x) = \mu + \frac{1-\alpha}{\beta(\alpha)}g(x, v_m(x)) + \frac{\alpha}{\beta(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x g(s, v_m(s))(x-s)^{\alpha-1}\mathrm{d}s, \tag{3}$$

где $m \in \mathrm{N}$, $v_0 = \mu$.

Теорема 1. *Последовательные приближения Пикара* (3) *можно записать в виде*

$$v_{m+1}(x,h) = \mu + (1-h)v_m(x) + \frac{h(1-\alpha)}{\beta(\alpha)}g(x, v_m(x)) + hI(x), \tag{4}$$

где

$$I(x) = \frac{\alpha}{\beta(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x g(s, v_m(s))(x-s)^{\alpha-1}\mathrm{d}s,$$

и $h \in (0, +\infty)$.

Теорема 2. *Если* $v \in H^1(0,1)$ *и* $g(x,v)$ *удовлетворяет условию Липшица по* v *с константой* $L < \frac{\Gamma(\alpha)\beta(\alpha)}{(1-\alpha)\Gamma(\alpha)+1}$, *то последовательные приближения* (4) *образуют фундаментальную последовательность в* $H^1(0,1)$, *сходящуюся к решению задачи Коши* (1) *при* $m \to +\infty$ *и подходящем выборе* h, *причём это решение является единственным.*

Источники и литература

1) Учайкин В.В. Метод дробных производных // Издательство «Артишок», Ульяновск, 2008.
2) Al-Refai M. Comparison principles for differential equations involving Caputo fractional derivative with Mittag-Leffler non-singular kernel // Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2018, No. 36, pp. 1–10, 2018.

3) Al-Refai M. On weighted Atangana-Baleanu fractional operators // Advances in Differential Equations, No. 3, 2020.
4) Atangana A., Baleanu D. New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: theory and applications to heat transfer model // Therm. Sci 20 (2), pp. 763–769, 2016.
5) Baleanu D, Fernandez, A. On some new properties of fractional derivatives with Mittag-Leffler kernel // Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, No. 59, pp. 444–462, 2018.
6) Das S. Functional Fractional Calculus // Springer-Verlag, Berlin, 2011.
7) Fareed A.F., Semary M.S., Hassan H.N. An approximate solution of fractional order equations based on controlled Picard's method with Atangana-Baleanu fractional derivative // Alexandria Engineering Journal, No. 61, pp. 3673–3678, 2022.
8) Gómez J.F., Torres L., Escobar R.F. Fractional Derivatives with Mittag-Leffler Kernel // Studies in Systems, Decisions and Control, Volume 194, Springer Switzerland AG, 2019.
9) Kashkari B, Syam M. Fractional-order Legendre operational matrix of fractional integration for solving the Riccati equation with fractional order // Appl Math Comput, pp. 281–291 ,2016.
10) Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations // Elsevier, Amsterdam, 2006.
11) Momani S., Odibat Z.M. Numerical comparison of methods for solving linear differential equations of fractional order // Chaos, Solitons, Fractals, vol. 31, pp. 1248–1255, 2007.
12) Podlubny I. Fractional Differential Equations // Mathematics in Science and Engineering, vol. 198, Academic Press, New York, 1999.
13) Semary M.S., Hassan H.N., Radwan A.G. Single and dual solution of fractional order differential order based on controlled Picard's method with Simpson rule // Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences, 24:1, pp. 247–253, 2017.
14) Syam M.I., Al-Refai M. Fractional differential equations Atangana-Baleanu fractional derivative: Analusis and applications // Chaos, Solitons & Fractals: X, 2, 2019.