Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Орбиты сферических представлений и двойственность Пясецкого

Научный руководитель – Тимашев Дмитрий Андреевич

Шунин Даниил Алексеевич
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей алгебры, Москва, Россия
E-mail: daniil.shunin@math.msu.ru

Двойственные линейные представления V и V^* комплексной связной линейной алгебраической группы G одновременно имеют либо бесконечное, либо конечное число орбит. В последнем случае между орбитами в V и V^* имеется биективное соответствие, называемое *двойственностью Пясецкого* [1]. Оно устанавливается при помощи *коммутационного многообразия*

$$\mathfrak{C} = \{(v, v^*) \mid \langle v^*, T_v(Gv)\rangle = 0\} \subset V \oplus V^*,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначает спаривание между V и V^*. Это замкнутое подмногообразие, каждая из неприводимых компонент $\mathfrak{C}_i$ которого совпадает с замыканием конормального расслоения $N^*O = \{(v, v^*) \mid v \in O, \langle v^*, T_v(Gv)\rangle = 0\}$ однозначно определенной орбиты $O \subset V$. И наоборот, замыкание множества N^*O для каждой орбиты O совпадает с одной из компонент $\mathfrak{C}_i$. Точно так же, орбиты Q в V^* находятся во взаимно однозначном соответствии с неприводимыми компонентами $\mathfrak{C}_i$ многообразия $\mathfrak{C}$. Сквозная биекция между орбитами в V и V^* и задает *двойственность Пясецкого*.

К примеру, в случае действия группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ в пространстве V квадратичных форм на $\mathbb{C}^n$ орбитами являются множества O_k форм ранга k. Аналогично, рангом k определяются и орбиты Q_k в двойственном пространстве V^* квадратичных форм на $(\mathbb{C}^n)^*$. Можно показать, что двойственными по Пясецкому здесь являются орбиты O_k и Q_{n-k}, $k = 0, \ldots, n$. В общем случае, соответствие может быть устроено весьма разнообразно.

Обозримым классом представлений с заведомо конечным числом орбит является класс *сферических представлений*, т.е. векторных пространств с линейным действием связной редуктивной группы, на которых борелевская подгруппа имеет открытую орбиту. В серии работ [2,3,4] получена классификация таких представлений. С ее помощью мы даем полное описание двойственности Пясецкого для орбит сферических линейных представлений.

Источники и литература

1) В. С. Пясецкий, *Линейные группы Ли, действующие с конечным числом орбит*, Функц. анализ и его прил. **9** (1975), № 4, 85—86.

2) C. Benson, G. Ratcliff, *A Classification of Multiplicity Free Actions*, J. Algebra **181** (1996), no. 1, 152–186.

3) V. G. Kac, *Some remarks on nilpotent orbits*, J. Algebra **64** (1980), 190–213.

4) A. S. Leahy, *A classification of multiplicity free representations*, J. Lie Theory, **8** (1998), no. 2, 367–391.