

**Топологическая теория Галуа разрешимости некоторых уравнений в
элементарных функциях методом Арнольда**

Научный руководитель – Белов Алексей Яковлевич

Аллеманд Аллан Олегович

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра математической логики и теории
алгоритмов, Москва, Россия
E-mail: allansuleykin@gmail.com

В работе ¹ доказываемость неразрешимость уравнений $\sin(z) - z = a$ и $\cos(z) - z = a$ в элементарных функциях методом Арнольда.

Особыми точками функции $f(z) = \sin(z) - z$ являются $z_k = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, а корни уравнения $f(z) = a$ имеют кратность 3. Из этого следует, что при обходе параметром a особой точки три корня уравнения переставляются циклически.

Функция $f(x)$ вещественного аргумента монотонно убывает – уравнение $f(x) = a$ имеет единственный вещественный корень. В силу свойств комплексного синуса, все комплексные корни уравнения будут идти сопряженными парами.

Получаем, что при обходе особой точки происходит циклическая перестановка вещественного корня и двух сопряженных комплексных корней, ближайших к этой точке. Остальные корни пройдут петлю около себя и вернуться обратно, так как аналитическая зависимость от a в малой окрестности на них влияет незначительно.

При обходе иной особой точки происходит циклическая перестановка другой пары комплексно сопряженных корней и вещественного корня, изначальная пара комплексных корней переходит в себя в силу соображений выше.

Пройденные петли порождают перестановки $(2\ 3\ 1)$ и $(1\ 5\ 4)$, порождающих неразрешимую группу S_5 . Как показано в статье [3], из этого следует неразрешимость исходного уравнения в элементарных функциях.

Для косинуса аналогично особыми точками кратности 3 будут $2\pi/3 + 2\pi k$.

В силу отрицательности производной почти всюду будет существовать единственный вещественный корень. Комплексные корни, как и у синуса, будут попарно сопряжены. Комбинируя петли вокруг особых точек, получим неразрешимую группу S_5 , из-за чего уравнение $\cos(z) - z = a$ также неразрешимо в элементарных функциях.

Источники и литература

- 1) Фукс Д.Б., Табачников С.Л. Математический дивертисмент, 2007.
- 2) Хованский А.Г. Топологическая теория Галуа. Разрешимость и неразрешимость уравнений в конечном виде. М.: Изд-во МЦНМО, 2008.
- 3) Belov-Kanel, A., Malistov, A., Zaytsev, R. (2020). Solvability of equations in elementary functions. Journal of Knot Theory and Its Ramifications, 29(2), 2040005.
- 4) Elishev, A. (2020). A brief comment on the paper "Solvability of equations in elementary functions" by Kanel-Belov, Malistov, and Zaytsev. Journal of Knot Theory and Its Ramifications, 29(2), 2040007.

¹Выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00177): <https://rscf.ru/project/22-11-00177/>