Секция «Математическое моделирование и информационные технологии»

Дискретные модели в пространстве состояний для решения задач параметрической идентификации одномерной модели диффузии

Галушкина Дарья Валерьевна
Аспирант
Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия
E-mail: smallcranberry@gmail.com

Модели диффузии применяются при решении широкого круга задач в экологии, геофизики и других областях. На практике очень часто возникает задача идентификации параметров моделей по наблюдаемым данным. Для решения данной задачи могут применяться различные методы, в частности, методы, основанные на использовании алгоритмов дискретной фильтрации, при этом возникает задача перехода от исходной модели с уравнением в частных производных к соответствующей дискретной модели в пространстве состояний.

Рассмотрим одномерную модель диффузии с граничными условиями первого рода [3]:

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 c(x,t)}{\partial x^2}, \tag{1}$$

$$c(x,0) = \varphi(x), \quad c(a,t) = f(t), \quad c(b,t) = g(t), \tag{2}$$

$$x \in [a;b], t \in [0;T],$$

где $c(x,t)$ — искомая функция, x — пространственная координата, t — время, α — коэффициент диффузии, $\varphi(x)$, $f(x)$ и $g(x)$ — заданные функции, a и b — границы рассматриваемой области (отрезка).

В работе рассматривается задача построения дискретных линейных стохастических моделей в пространстве состояний для модели (1), (2) вида:

$$\begin{cases} c_k = F_{k-1} c_{k-1} + B_{k-1} u_{k-1}, \\ z_k = H_k c_k + \xi_k, \quad k = 1, 2, \dots, K, \end{cases}$$

где $c_k \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $u_k \in \mathbb{R}^r$ — вектор входных воздействий (управления), $z_k \in \mathbb{R}^m$ — вектор измерений, $\xi_k \in \mathbb{R}^m$ — шум в измерителе.

Зададим в рассматриваемой пространственно-временной области конечно-разностную сетку $\{(x_i, t_k) | i = 0, 1, \dots, N, k = 0, 1, \dots, K\}$:

$$x_i = a + i\Delta x, t_k = k\Delta t, \quad \Delta x = \frac{b-a}{N-1}, \Delta t = \frac{T}{K-1}.$$

Обозначим: $c_i^k = c(x_i, t_k)$, $\varphi_i = \varphi(x_i)$, $f^k = f(t_k)$, $g^k = g(t_k)$.

Для решения поставленной задачи выполним дискретизацию исходной модели с использованием конечно-разностных схем второго и четвертого порядка точности [1, 2].

В качестве примера рассмотрим случай $N = 5$ и схему четвертого порядка точности. Уравнение состояния будет иметь вид:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} c_1^k \\ c_2^k \\ c_3^k \\ c_4^k \end{bmatrix}}_{c_k} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_3 + a_1 a_5 & a_2 + a_1 a_6 & a_1 a_5 & a_1 a_4 \\ a_5 & a_6 & a_5 & a_4 \\ a_4 & a_5 & a_6 & a_5 \\ a_1 a_4 & a_1 a_5 & a_1 a_6 + a_2 & a_1 a_5 + a_3 \end{bmatrix}}_{F_{k-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1^{k-1} \\ c_2^{k-1} \\ c_3^{k-1} \\ c_4^{k-1} \end{bmatrix}}_{c_{k-1}} +$$

$$+\underbrace{\begin{bmatrix} a_2+a_1a_4 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2+a_1a_4 \end{bmatrix}}_{B_{k-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} f^{k-1} \\ f^k \\ g^k \\ g^{k-1} \end{bmatrix}}_{u_{k-1}} \tag{3}$$

К уравнению состояния добавим уравнение измерений вида:

$$z_k = H_k c_k + \xi_k, \tag{4}$$

где $H_k = I_3$.

Полученная дискретная модель может быть использована для идентификации неизвестных коэффициентов и граничных условий модели диффузии (1), (2) методами рекуррентной дискретной фильтрации.

Источники и литература

1) Галушкина Д. В., Кувшинова А. Н. Построение дискретной модели уравнения диффузии в пространстве состояний на основе конечно-разностной схемы четвертого порядка // Ученые записки УлГУ. Серия Математика и информационные технологии. 2024. №2. С. 20–28.

2) Галушкина Д. В., Кувшинова А. Н., Цыганова Ю. В. Численная идентификация граничных условий в модели реакции-диффузии // Информационные технологии и нанотехнологии (ИТНТ-2023): сборник трудов по материалам IX Международной конференции и молодежной школы (г. Самара, 17–23 апреля 2023 г.). Т. 5. Науки о данных. Самара : Издательство Самарского университета. 2023. С. 050322.

3) Фарлоу С. Д. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров М.: Мир, 1985. 383 с.