Секция «Математика и её приложения»

Нулевое собственное значение несамосопряженного оператора SSH на бесконечной цепочке

Малышева Мария Александровна
Студент (бакалавр)
Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия
E-mail: malysheva2004ma@yandex.ru

Дискретную модель, соответствующую бесконечной цепочке SSH (Su-Schrieffer-Heeger), описывает оператор H, действующий на двухкомпонентные функции $\Psi(n) = (\psi_1(n), \psi_2(n))^T$, где T — транспонирование, согласно формуле

$$H \begin{pmatrix} \psi_1(n) \\ \psi_2(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\delta\psi_1(n) + w\psi_2(n-1) + v\psi_2(n) \\ -i\delta\psi_2(n) + v\psi_1(n) + w\psi_1(n+1) \end{pmatrix},$$

здесь $\psi_i(n) \in l^2(Z)$, $vgt;0$, $wgt;0$, $\delta \in R$ [1], [2]. Предполагаем, что $\delta \neq 0$, при этом оператор H не является самосопряженным.

С помощью функции Грина оператора H [3] найдено условие существования нулевого собственного значения оператора $H+V$, где оператор V действует по формуле

$$V \begin{pmatrix} \psi_1(n) \\ \psi_2(n) \end{pmatrix} = V_0 \begin{pmatrix} \delta_{n,1}\psi_1(1) \\ \delta_{n,N}\psi_2(N) \end{pmatrix},$$

$\delta_{n,m}$ — символ Кронекера, $V_0 = const$, и описывает два барьера, находящихся в узлах цепочки с номерами $n = 1$ и $n = N$. В частном случае аналитически найдена собственная функция, отвечающая $E = 0$.

Теорема 1. Оператор $H + V$ обладает нулевым собственным значением, если

$$w^2v^2(e^{ik} - e{-}ik)^2 + \delta^2V_0^2 - V_0^2(we^{ik} + v)^2e^{2ik(N-1)} = 0$$

где $\cos k = \frac{\delta^2 - w^2 - v^2}{2wv}$.

Пример. Положим $w = v = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\delta = \sqrt{3}$.
Используя теорему 1 получим, что $E = 0$ является собственным значением оператора $H + V$, если V_0 удовлетворяет равенству

$$V_0^2 = \frac{1}{(2-\sqrt{3})^{2N-1} - 1}.$$

Соответствующая собственная функция имеет вид

$$\Psi(n) = (\psi_1(n), \psi_2(n))^T + O(\varepsilon^2),$$

где

$$\psi_1(n) = \begin{cases} e^{ik(1-n)}, & amp; n \leqslant 1, \\ \left(1 - \frac{2}{\sqrt{1-e^{ik(2N-1)}}}\right) e^{ik(n-1)} - i\frac{e^{ik(1-n)}}{\sqrt{1-e^{ik(2N-1)}}}, & amp; 1 < n > N, \end{cases}$$

$$\psi_2(n) = \begin{cases} ie^{-ikn}\left(\frac{(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2(1-e^{ik(2N-1)})}} - \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right), & amp; n \leqslant 0, \\ i\left(\frac{(\sqrt{3}+1)e^{ikn}}{\sqrt{2(1-e^{ik(2N-1)})}} - \frac{2\sqrt{2}e^{-ikn}}{\sqrt{3}+1}\right), & amp; 1 \leqslant n \leqslant N, \\ ie^{ikn}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+1)\varepsilon^2}\right), & amp; n \geqslant N+1, \end{cases}$$

$\varepsilon = e^{ikN}$ мало при больших значениях N, $e^{ik} = 2 - \sqrt{3}$.

Источники и литература

1) J.K. Asboth, L. Oroszlany, A. Palyi. The Su-Schrieffer-Heeger (SSH) Model // A short course on topological insulators, pp.1-22, 2016, DOI: 10.1007/978-3-319-25607-8_1.
2) Y. Ashida, Z. Gong, M. Ueda. Non-Hermitian physics // Advances in Physics, 69(3), 2020, DOI: 10.1080/00018732.2021.1876991.
3) T. S. Tinyukova, Yu. P. Chuburin. Eigenvalues and eigenfunctions of the perturbed non-Hermitian SSH Hamiltonian with PT symmetry // Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta, vol. 62, pp. 87–95, 2023, DOI: 10.35634/2226-3594-2023-62-07.