

Сингулярное разложение и его применение.

Пинчук Никита Михайлович

E-mail: nikitapinchuk1601@mail.ru

Одним из наиболее значимых достижений теории матриц является представление матриц в виде разложений или канонических форм. В последние десятилетия такие разложения стали важнейшим инструментом численных методов линейной алгебры, лежащих в основе решения широкого круга задач.

Среди множества видов матричных разложений особое место занимает сингулярное разложение, представляющее матрицу A в виде произведения $U\Sigma V$, где U и V — унитарные матрицы, а Σ — диагональная матрица.

В рамках работы рассматриваются ключевые теоретические аспекты SVD: его существование, (не)единственность, геометрическая интерпретация, различные виды (полное, усечённое разложение) и оптимальный выбор ранга. Особое внимание уделено методам вычисления: преобразованию Хаусхолдера, bidiagonalизации, вращениям Гивенса и Якоби, в частности — методу Голуба-Кахана.

Рассматриваются многомерные обобщения сингулярного разложения, включая разложение Такера, тензорные произведения и их связь с SVD. Обсуждается задача наилучшего низкорангового приближения, а также проблема выбора оптимального ранга.

Исследуются применения SVD в анализе данных: выявление скрытых факторов, обобщение и сжатие данных, а также связь с методом главных компонент (PCA), факторным анализом, дискретным преобразованием Фурье (ДПФ) и аналитическим сингулярным разложением (ASVD). Затрагиваются аспекты теории случайных матриц, в частности ансамбль Лагерра.

Практическая часть включает обзор приложений: низкоразмерное представление и сжатие изображений, оптимальный выбор ранга для квадратных матриц, распознавание цифр в однопиксельной системе без реконструкции изображения (Target Recognition Based on Singular Value Decomposition in a Single-Pixel Non-Imaging System), распознавание лиц с использованием метода eigenfaces, рекомендательная система на основе сингулярного разложения разреженной матрицы рейтингов (Funk-SVD), а также скрытое семантическое индексирование (Latent Semantic Indexing, LSI).

Отдельное внимание уделяется собственному исследованию: анализу морфологических параметров популяций *Acer negundo* в условиях высотного градиента климатических факторов Республики Адыгея с применением метода SVD.