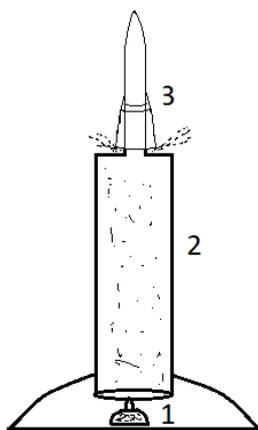


## КЛАССЫ 7-9

### 2.2 Вариант

1. Мальчик спроектировал установку по запуску ракеты. По замыслу мальчика спиртовка (1) нагревает воздух в цилиндре (2), вследствие чего создается давление и в какой-то момент нагретый воздух выталкивает ракету (3) вверх. На практике выяснилось, однако, что ракету чрезвычайно сложно установить на цилиндр так, чтобы нагретый воздух не выходил из цилиндра. На рисунке показана одна из неудавшихся попыток запуска.



Из-за негерметичной установки ракеты, давление в цилиндре не изменилось. При этом воздух в цилиндре в процессе нагревания изменил свою температуру с 15 до 25 градусов Цельсия. Считая, что коэффициент полезного действия

горелки равен 5% (остальная энергия уходит на нагревание атмосферы и т.п.), вычислите массу сожженного спирта. Объем цилиндра равен  $20000 \text{ см}^3$ , плотность воздуха равна  $1,2 \text{ кг/м}^3$ , его удельная теплоёмкость  $1,01 \text{ кДж/(кг}\cdot\text{°C)}$ , удельная теплота сгорания спирта  $27 \text{ МДж/кг}$ . Ответ приведите в граммах, округлив до одной сотой.

2. На свои опыты с ракетой мальчик истратил 22% спирта из бутылки, стоявшей в кладовой. Кроме того, он забыл закрыть бутылку, а когда вспомнил, то выяснилось, что еще 12% оставшегося спирта испарилось. Чтобы отец не заметил убыли, мальчик долил бутылку водой, так что в результате объем жидкости в бутылке даже увеличился на 4% по сравнению с исходным. Какова теперь концентрация спирта в бутылке? Ответ приведите в процентах, округлив до сотых долей.
3. После неудачи с запуском «воздушной» ракеты, мальчик стал посещать кружок по моделированию, где изготовил пороховую ракету. Пороховой двигатель этой ракеты работает ровно 6 секунд и обеспечивает ей все это время постоянное ускорение, равное  $1,5g$  (при отсутствии внешних сил). Какой максимальной высоты достигнет ракета при вертикальном пуске? Сопротивление воздуха не учитывайте и считайте, что  $g=9,8 \text{ м/с}^2$ . Ответ приведите в метрах, округлив до целого.

4. Продолжив свои занятия в кружке, мальчик в команде с другими ребятами запустил на аэростате передатчик телеметрии. Передача идет по открытому радиоканалу и для того, чтобы данные не были похищены конкурирующей командой, ребята придумали систему авторизации приемника. Процедура авторизации такова: передатчик отправляет случайно выбранное число  $N$  в диапазоне от 5 до 99 и ждет правильного ответа – номера первой (считая справа налево) цифры числа  $N! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot N$ , отличной от нуля и делящейся на 3 без остатка. Напишите программу на вашем любимом языке программирования, вычисляющую эту цифру. Программа принимает на вход целое число  $N$  и выводит номер искомой цифры. Если такой цифры в записи числа нет, программа выводит "0".

Пример:

Ввод: 9

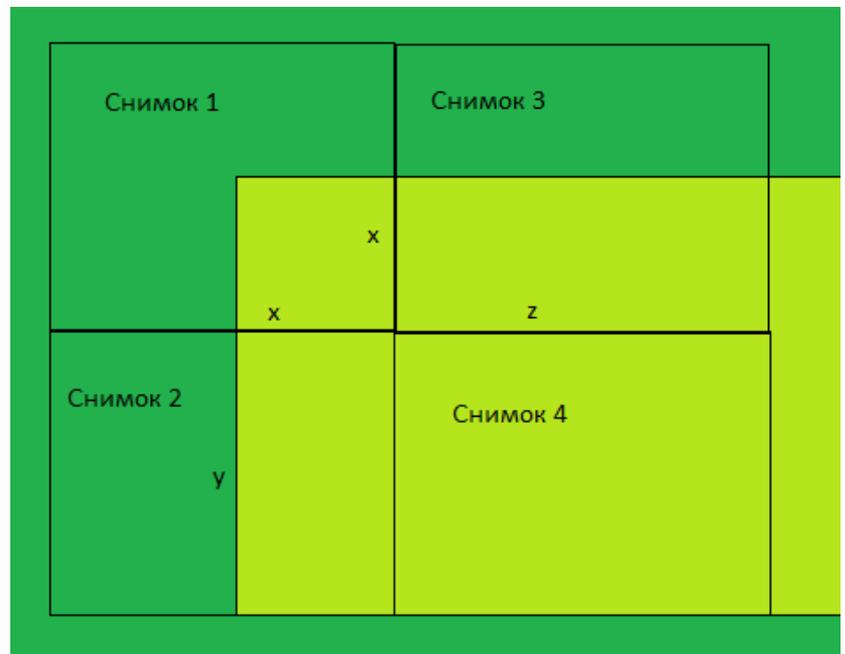
Вывод: 5

Действительно,  $9! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 9 = 362880$ . Первая, считая справа, цифра этого числа, отличная от нуля и делящаяся на 3, – это цифра 6, стоящая в пятом разряде.

Ввод: 5

Вывод: 0

5. Ребята пытаются провести анализ снимков леса, полученных при последнем запуске. На темно-зеленом фоне леса хорошо видны светло-зеленые прямоугольники – результаты вырубок. Программа автоматически вычисляет для каждого снимка площадь вырубки, ее периметр и отношение  $\rho = \frac{\text{Периметр}}{\sqrt{\text{Площадь}}}$ . Одна из таких вырубок оказалась



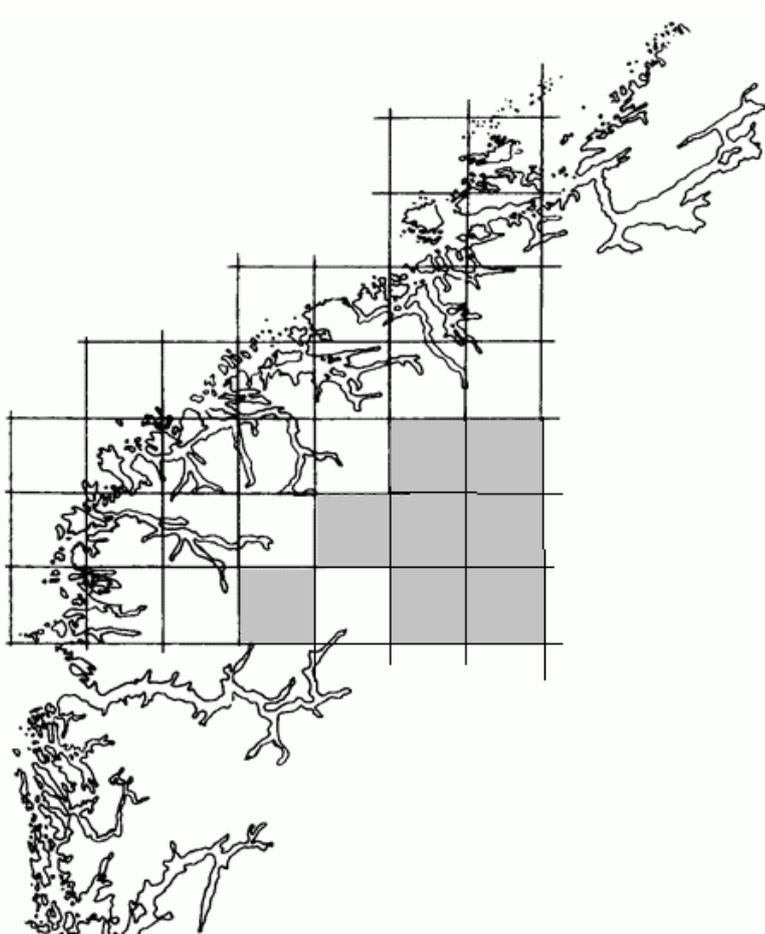
разделенной на четыре снимка, причем на первый снимок попал квадрат со стороной  $x$ , на второй – прямоугольник со сторонами  $x$  и  $y > x$ , а на третий – прямоугольник со сторонами  $x$  и  $z > x$ . Можно ли найти коэффициент  $\rho$  для

первого снимка? Найдите коэффициент для четвертого снимка, зная, что для второго и третьего этот коэффициент равен 5 и 16,25 соответственно.

6. При анализе космических снимков часто приходится делить точки снимка на два класса: нетронутый лес/вырубка, море/суша и так далее. При этом часто необходимо оценить площадь и периметр области (вырубки, острова, ледника) и т.д.

а) Предположим, Вам доступны снимки с произвольным (каким угодно большим) разрешением. Как бы Вы измерили площадь большого объекта по набору его снимков?

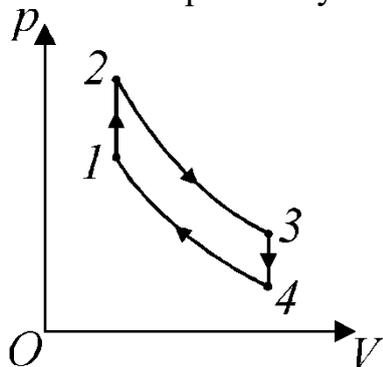
б) Как бы Вы стали измерять “величину границы” объекта? В вашем ответе постарайтесь учесть следующее. Мы знаем, что при гомотетии с коэффициентом  $k$  площадь треугольников и четырехугольников меняется в  $k^2$  раз. Также происходит и со сложными фигурами, получаемыми при картографировании. Мы знаем, что при такой гомотетии периметры простых фигур (треугольников, четырехугольников и т.п.) меняются в  $k$  раз. Оказывается, что границы фигур, получаемых при картографировании ведут себя не так. При изменении масштаба снимка в  $k$  раз они меняют свою длину в  $k^D$  раз, где  $D$  (оно называется фрактальной размерностью границы) отлично от 1 (например, при картографировании побережья Норвегии, это число экспериментально определено равным 1,52, а для побережья Великобритании 1,3).



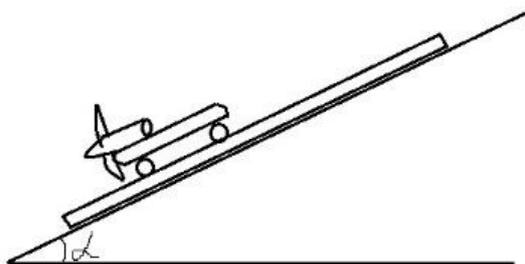
# КЛАССЫ 10-11

## 1.2 ВАРИАНТ

1. Мальчик решил установить на свой беспилотник бензиновый двигатель внутреннего сгорания. В качестве аппроксимации рабочего процесса в двигателе внутреннего сгорания он использует так называемый термодинамический цикл Отто, названный в честь немецкого инженера Николауса Отто. На рисунке изображена  $pV$ -диаграмма цикла Отто, проводимого над идеальным газом. Этот цикл состоит из двух изохор  $1-2$ ,  $3-4$  и двух адиабат  $2-3$ ,  $4-1$ . Известно, что работа, совершаемая газом за цикл, в  $\beta = 1,2$  раза больше, чем количество теплоты, отдаваемое газом за цикл холодильнику. Найдите коэффициент полезного действия цикла  $\eta$ .



2. Бензиновый двигатель оказался слишком тяжелым для беспилотника, и мальчик решил попробовать электрический винтовой двигатель на современных аккумуляторах. Для того, чтобы протестировать двигатель, мальчик установил его на тележку, которую спускает вниз по доске (двигатель тянет тележку вниз), лежащей на покрытой льдом поверхности горки. При этом винт двигателя создает такое ускорение, что



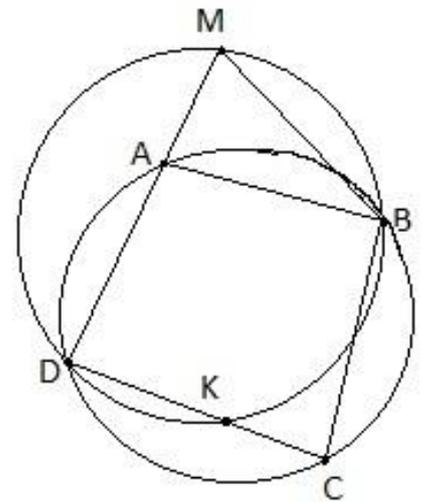
двигателя создает такое ускорение, что

доска остается неподвижной (трение между льдом и доской считайте пренебрежимо малым). Масса электрического двигателя (с аккумуляторами, винтом и т.д.)  $m_0 = 1,5$  кг, масса тележки  $m_1 = 2,5$  кг, масса доски  $M = 5$  кг, поверхность горки образует с горизонтом угол  $\alpha = 30^\circ$ . Найдите силу тяги винта (в ньютонах с точностью до десятых).

3. Продолжив свои занятия в кружке, мальчик в команде с другими ребятами запустил на аэростате передатчик телеметрии. При первичном измерении была допущена ошибка – датчик определил свою скорость как  $10 + y$  вместо 10. В следующий раз скорость была вычислена на основании предыдущей, так что ошибка стала накапливаться. Зная суммарную относительную ошибку, найдите исходную ошибку  $y$ , решив уравнение

$$\frac{10}{(y+10)} + \frac{10 \cdot 9}{(y+10)(y+9)} + \dots + \frac{10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 1}{(y+10)(y+9) \dots (y+1)} = 12$$

4. В результате ошибок позиционирования аппарат после спуска на землю был утерян. Для его поиска вначале была определена круговая область и четырехугольник  $ABCD$  с точками на окружности. Затем, однако, информация о месте посадки была уточнена, в результате чего была определена другая область для поиска (также имеющая форму круга). При этом точка  $A$  была смещена в точку  $M$  вдоль прямой  $AD$ , точка  $C$  – в точку  $K$  вдоль прямой  $CD$ , а точки  $B$  и  $D$  не менялись, так что получился четырехугольник  $MBKD$  с точками на новой окружности (см. рисунок). Найдите  $AB$ , если  $AM = 4$ ,  $BC = 6$ ,  $CK = 2$ .



5. Ребята пытаются провести анализ снимков леса, полученных при последнем запуске. На темно-зеленом фоне леса хорошо видны светло-зеленые прямоугольники – результаты вырубок. Рассмотрим прямоугольный участок леса размера  $M \times N$  метров с нижней левой вершиной в начале координат локальной карты и сторонами, параллельными осям координат. Нам известны снимки  $K$  прямоугольных вырубок размера  $300 \times 300$  метров с координатами левой нижней точки  $(x, y)$  для каждой вырубki. Найдите площадь сохранившегося леса. Для решения задачи напишите программу на вашем любимом языке программирования, которая принимает на вход следующие данные:

Первая строка - два натуральных числа  $M$  и  $N$  – размер лесной области

Вторая строка - натуральное число  $K$  – количество снимков с вырубками

$K$  последующих строк – пары натуральных чисел  $x$   $y$  – координаты левого нижнего угла снимка

Программа должна вывести натуральное число  $S$  – площадь сохранившегося лесного участка в квадратных метрах

Пример. Ввод:

500 500

2

0 0

100 100

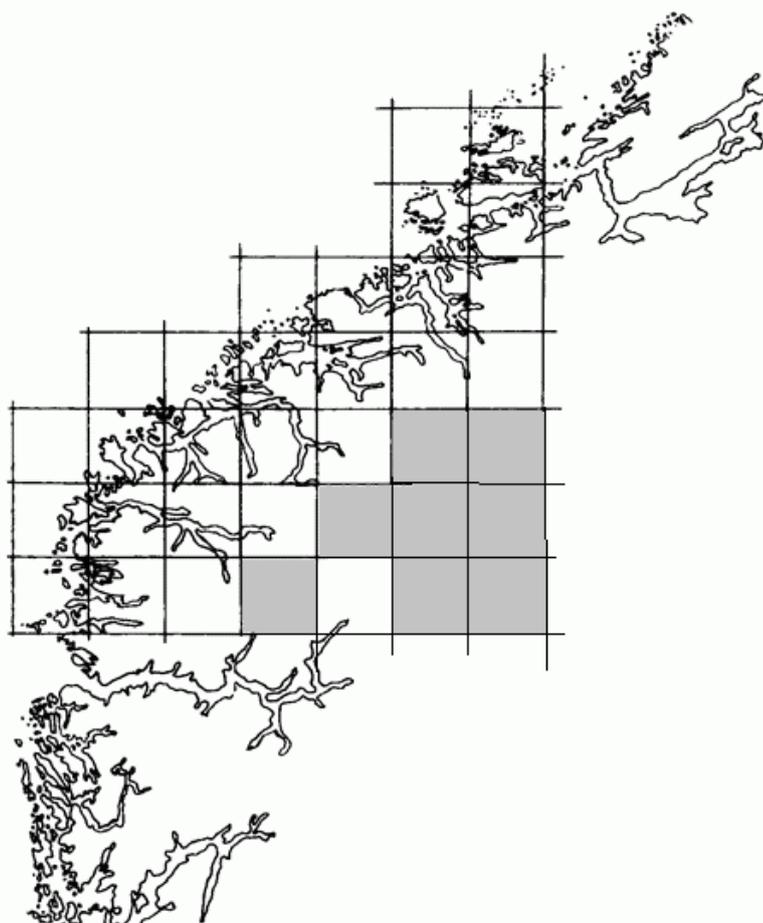
Вывод:

110000

6. При анализе космических снимков часто приходится делить точки снимка на два класса: нетронутый лес/вырубка, море/суша и так далее. При этом часто необходимо оценить площадь и периметр области (вырубки, острова, ледника) и т.д.

а) Предположим, Вам доступны снимки с произвольным (каким угодно большим) разрешением. Как бы Вы измерили площадь большого объекта по набору его снимков?

б) Как бы Вы стали измерять “величину границы” объекта? В Вашем ответе постарайтесь учесть следующее. Мы знаем, что при гомотетии с коэффициентом  $k$  площадь треугольников и четырехугольников меняется в  $k^2$  раз. Также происходит и со сложными фигурами, получаемыми при картографировании. Мы знаем, что при такой гомотетии периметры простых фигур (треугольников, четырехугольников и т.п.) меняются в  $k$  раз. Оказывается, что границы фигур, получаемых при картографировании ведут себя не так. При изменении масштаба снимка в  $k$  раз они меняют свою длину в  $k^D$  раз, где  $D$  (оно называется фрактальной размерностью границы) отлично от 1 (например, при картографировании побережья Норвегии, это число экспериментально определено равным 1,52, а для побережья Великобритании 1,3).



в) Рассмотрим модельную ситуацию – “береговую линию”, построенную по следующему алгоритму. Вначале взяли отрезок на плоскости с концами  $(0,0)$  и  $(1,0)$ . На первом шаге разбили этот отрезок на три равные части, построили на центральной части, как на основании равносторонний треугольник, основание стерли. На втором шаге с каждым из четырех звеньев полученной ломаной поступили так же. И так далее. Найдите фрактальную размерность этой кривой.

