ЛОМОНОСОВ. КОСМОНАВТИКА

финальный тур 2019

Решения. Классы 7-9.

Задача 1.

Чтобы увеличить температуру воздуха на Δt, ему нужно передать количество теплоты, равное: $Q = cm\Delta t$, где $m = \rho V$ – масса воздуха в цилиндре. По определению КПД горелки $Q = \eta q M$. Следовательно, $M = \frac{c\rho V\Delta t}{\mu q} = \frac{1{,}01\cdot 10^3\cdot 1{,}2\cdot 1500\cdot 10^{-6}\cdot 20}{0{,}08\cdot 27\cdot 10^6} \approx 16833\cdot 10^{-9}$кг $= 0{,}17$г

Ответ: 0,17г.

Задача 2.

Пусть начальный объем спирта равен V. Тогда его итоговый объем равен $0{,}84\cdot 0{,}85\cdot V = 0{,}714V$. Итоговый объем смеси равен $1{,}05V$, так что концентрация спирта равна $\frac{0{,}714V}{1{,}05V} = 0{,}68$.

Ответ: 68%.

Задача 3.

Введем систему координат, направив ось вертикально вверх и выбрав в качестве точки отсчета место старта ракеты. По условию, двигатель работает $t_0 = 4$ секунды и обеспечивает ускорение $a = 1{,}3g$. Во время работы двигателя ракета движется с ускорением $a - g = 0{,}3g$ при нулевой начальной скорости, то есть в момент остановки двигателя она имеет скорость $v_0 = 0{,}3gt_0$ и координату $s_0 = \frac{0{,}3g(t_0)^2}{2} = 23{,}52$. Затем ракета начинает двигаться с ускорением $(-g)$ и достигает наивысшей точки в тот момент, когда ее скорость становится нулевой: $v_0 - t_1 g = 0 \Leftrightarrow t_1 = {}^{v_0}/_{g} = 0{,}3t_0$. За это время ракета пройдет расстояние

$$s_1 = v_0 t_1 - \frac{g(t_1)^2}{2} = (0{,}3t_0)^2 g - \frac{(0{,}3t_0)^2 g}{2} = \frac{(0{,}3t_0)^2 g}{2} = 7{,}056$$

Итого, $s_0 + s_1 = 30{,}576 \approx 31$м.

Ответ: 31м.

Задача 4.

```
# Ниже приведена программа на языке Python
N=int(input())
M=1
# Находим N!
for i in range(1,N+1):
    M*=i
# Ищем номер цифры, которая не равна 0 и делится на 3. Начинаем с крайней правой
# цифры – ее номер 1
res=1
```

```
flag=0
while M>=1:
    a=M%10
# Теперь a равно последней цифре. Если эта цифра не ноль и делится на 3, выходим
# из цикла
    if (a==3) or (a==6) or (a==9):
      flag=1
      break
# В противном случае отбрасываем последнюю цифру и повторяем цикл
    M=M//10
    res+=1
# Теперь res хранит либо номер искомой цифры (если цикл был прерван),
# либо число цифр числа N!, увеличенное на 1.
# В этом случае надо поменять его значение на 0
if (flag==0):
  res=0
print(res)
```

Задача 5.

Первый снимок – квадрат со стороной x. Тогда $\rho_1 = \frac{4x}{\sqrt{x^2}} = 4$.

Второй снимок – прямоугольник со сторонами x и y. Тогда $\rho_2 = \frac{2(x+y)}{\sqrt{xy}} = 4{,}45$. Третий снимок – прямоугольник со сторонами x и z. Тогда $\rho_3 = \frac{2(x+z)}{\sqrt{xz}} = 5$. Аналогично, для четвертого снимка получаем $\rho_4 = \frac{2(y+z)}{\sqrt{yz}}$. Остается решить систему уравнений. Для первого уравнения имеем $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 2{,}225$. Обозначим дробь $\sqrt{\frac{x}{y}}$=t и получим квадратное уравнение $t^2 - 2{,}225t + 1 = 0$, откуда $t = 1{,}6$ или $t = 0{,}625$. По условию, $y > x$, так что выбираем второй корень. Аналогично, из второго уравнения получаем $t^2 - 2{,}5t + 1 = 0$, откуда $t = 0{,}5$. Итак, $y = 2{,}56x$, $z = 4x$. Подставляем эти равенства и получаем $\rho_4 = \frac{2(2{,}56x+4x)}{\sqrt{2{,}56x \cdot 4x}} = 4{,}1$.

Ответ: 4 и 4,1.

Задача 6.

А) Пусть нам необходимо измерить площадь некоторого объекта с точностью ε. Разобьем снимок сеткой из квадратов с длиной стороны h. Будем считать, что для каждого квадрата сетки мы умеем определять (вручную или автоматически) принадлежность этого квадрата к одной из трех категорий: «квадрат целиком входит в измеряемый объект», «квадрат целиком входит в дополнение к измеряемому объекту» и «квадрат содержит и точки объекта, и точки его дополнения». Обозначим общее число квадратов N, число квадратов первого вида N_1, второго вида N_2 и третьего вида N_3. Составим две дроби $k_1 = \frac{N_1}{N}$ и $k_2 = \frac{N-N_2}{N}$. Умножая эти величины на общую площадь снимка S, получим значение *внутренней* и *внешней меры* объекта $S_1 = k_1 S$ и $S_2 = k_2 S$. Понятно, что истинное значение площади находится на промежутке $[S\_1, S\_2]$. Теперь начнем увеличивать число квадратов, уменьшая тем самым длину стороны h. В какой-то момент точность определения, к какой категории относится данный квадрат, станет неудовлетворительной. Тогда мы перейдем к снимку с большим разрешением и продолжим процесс. В тот момент, когда величина $S_2 - S_1$ станет меньше заданной нам точности ε, процесс можно остановить, взяв в качестве ответа величину $\frac{S_1+S_2}{2}$.

Б) Пусть нам необходимо измерить «величину границы» некоторого объекта. Разобьем снимок сеткой из квадратов с длиной стороны h. Будем считать, что для каждого квадрата сетки мы умеем определять (вручную или автоматически) принадлежность этого квадрата к одной из трех категорий: «квадрат целиком входит в измеряемый объект», «квадрат целиком входит в дополнение к измеряемому объекту» и «квадрат содержит и точки объекта, и точки его дополнения». Обозначим общее число квадратов N, число квадратов первого вида N_1, второго вида N_2 и третьего вида N_3. Будем считать, что центры квадратов третьего вида лежат на нашей кривой, а длина кривой приблизительно равна длине ломаной, соединяющей эти точки. Тогда эту длину можно приблизительно оценить выражением $l(h) = N_3 h$ (мы считаем, что кривая непрерывным образом соединяет центры соседних квадратов). Теперь начнем увеличивать число квадратов, уменьшая тем самым длину стороны h. В какой-то момент точность определения, к какой категории относится данный квадрат, станет неудовлетворительной. Тогда мы перейдем к снимку с большим разрешением и продолжим процесс. Каков бы ни был измеряемый объект, существует максимальная разумная точность детализации его границы. Например, на береговых линиях отсутствуют детали меньше 1 см, при измерении периметра вырубки нет смысла выбирать детализацию больше, чем среднее расстояние между деревьями в лесу и т.д. Таким образом, возможны два случая. Если нам доступны снимки с требуемой детализацией, то мы просто находим величину $l(h_0)$ для данного h_0 и берем ее в качестве длины границы объекта. Если снимки с требуемой детализацией не доступны, то необходимо определить характер функции $l(h)$ и затем продолжить ее за область определения (экстраполировать) и определить ее предполагаемое значение в точке h_0. Для гладких кривых функция $l(h)$ имеет предел при $h \to 0$. Для реальных кривых величина $l(h)$ при уменьшении h возрастает к бесконечности как $C \cdot h^{-D}$. Таким образом, вначале необходимо экспериментально или с помощью уже имеющихся таблиц определить величину D, а затем и величину C как предел функции $l(h) \cdot h^D$. Параметр D интересен и тогда, когда величина $l(h_0)$ может быть найдена непосредственно. Он показывает «изрезанность», «изгибистость» границы объекта.

Критерии

Задачи 6.а) и 6.б) оценивались независимо.

За каждую из задач выставлялись оценки “+” – решена верно, “+.” – есть несущественные ошибки (приравнивается к “+”), “+/-“ – решение, в целом, верное, “-/+” – есть верная идея решения.

Критерии общей оценки:

Нет чистых плюсов, нет плюс/минусов=0.

Нет чистых плюсов, есть ровно один плюс/минус и больше ничего=0.
Нет чистых плюсов, есть плюс/минус и еще плюс/минус или минус/плюс=30.
Ровно один чистый плюс, нет плюс/минусов=40.
Ровно один чистый плюс, ровно один плюс/минус и больше ничего=45.
Ровно один чистый плюс, есть плюс/минус и еще плюс/минус или минус/плюс=50.
Ровно два чистых плюса, нет плюс/минусов=50.
Ровно два чистых плюса, ровно один плюс/минус и больше ничего=55.
Ровно два чистых плюса, есть плюс/минус и еще плюс/минус или минус/плюс=60.
Ровно три чистых плюса, нет плюс/минусов=60.
Ровно три чистых плюса, ровно один плюс/минус и больше ничего =65.
Ровно три чистых плюса, есть плюс/минус и еще плюс/минус или минус/плюс=70.
Ровно четыре чистых плюса, нет плюс/минусов=70.
Ровно четыре чистых плюса, ровно один плюс/минус и больше ничего =75.
Ровно четыре чистых плюса, есть плюс/минус и еще плюс/минус или минус/плюс=80.
Ровно пять чистых плюсов, нет плюс/минусов=80.
Ровно пять чистых плюсов, ровно один плюс/минус и больше ничего =85.
Ровно пять чистых плюсов, есть плюс/минус и еще плюс/минус или минус/плюс=90.
Ровно шесть чистых плюсов, нет плюс/минусов=90.
Ровно шесть чистых плюсов и есть один плюс/минус=95.
Ровно семь чистых плюсов =100.

Решения. Классы 10-11.

Задача 1.

Газ получает теплоту от нагревателя на участке $1-2$ и отдает теплоту холодильнику на участке $3-4$. КПД цикла $\eta = \frac{A}{Q_{12}}$, где A – работа, совершаемая газом за цикл. По условию $A = \alpha\,|Q_{34}|$. Кроме того, $Q_{12} = A + |Q_{34}| = (\alpha+1)\,|Q_{34}|$.

Ответ: $\eta = \frac{\alpha}{\alpha+1} = 0{,}6$, или 60%.

Задача 2.

Вдоль поверхности наклонной плоскости на доску действуют сила трения F, направленная вверх, и составляющая веса доски $Mg\sin\alpha$, направленная вниз. По условию, эти две силы равны по величине, т.е. $F = Mg\sin\alpha$. Отсюда получим $F = 25$ Н. По третьему закону Ньютона, сила F создает такую же по величине силу P, действующую на тележку. Эта сила P есть часть той силы тяги, о которой идет речь в задаче. Остальная часть силы тяги, связанная с реактивным движением, не влияет на положение доски на наклонной плоскости. Таким образом, полная сила тяги будет больше или равна 25 Н.

Ответ: $F_{\text{тяги}} \geq 25$ Н.

Задача 3.

Необходимо решить уравнение $\frac{10}{(x+10)}+\frac{10\cdot 9}{(x+10)(x+9)}+\dots+\frac{10\cdot 9\cdot\dots\cdot 1}{(x+10)(x+9)\dots(x+1)}=11$. Сложим две последние дроби

$$\frac{10\cdot 9\cdot\dots\cdot 2}{(x+10)(x+9)\dots(x+2)}+\frac{10\cdot 9\cdot\dots\cdot 2\cdot 1}{(x+10)(x+9)\dots(x+2)(x+1)}$$
$$=\frac{10\cdot 9\cdot\dots\cdot 2(x+1+1)}{(x+10)(x+9)\dots(x+2)(x+1)}=\frac{10\cdot 9\cdot\dots\cdot 2}{(x+10)(x+9)\dots(x+3)(x+1)}.$$

Теперь к этой дроби добавим третье (с конца) слагаемое

$$\frac{10\cdot 9\cdot\dots\cdot 2}{(x+10)(x+9)\dots(x+3)(x+1)}+\frac{10\cdot 9\cdot\dots\cdot 3}{(x+10)(x+9)\dots(x+3)}$$
$$=\frac{10\cdot 9\cdot\dots\cdot 3(2+x+1)}{(x+10)(x+9)\dots(x+3)(x+1)}=\frac{10\cdot 9\cdot\dots\cdot 3}{(x+10)(x+9)\dots(x+4)(x+1)}.$$

Проделав эту операцию еще семь раз, получим уравнение $\frac{10}{x+1}=11$, откуда $x=-\frac{1}{11}$.

Ответ: $-\frac{1}{11}$.

Задача 4.

Обозначим $\angle DAB=\alpha$. Тогда $\angle MAB=\angle BCK=180-\alpha$ (свойство вписанного четырехугольника $ABCD$). Обозначим $\angle ABC=\beta$. Тогда $\angle ABC=180-\beta$ (свойство вписанного четырехугольника $ABCD$), $\angle MBK=\beta$ (свойство вписанного четырехугольника $MBKD$). Итак, $\angle MBA+\angle ABK=\beta=\angle ABK+\angle KBC$, то есть $\angle MBA=\angle KBC$. Тогда треугольники ABM и CBK подобны, откуда $\frac{AB}{CB}=\frac{6}{7}=\frac{AM}{CK}=\frac{AM}{2}$.

Ответ: $AM=\frac{12}{7}$.

Задача 5.

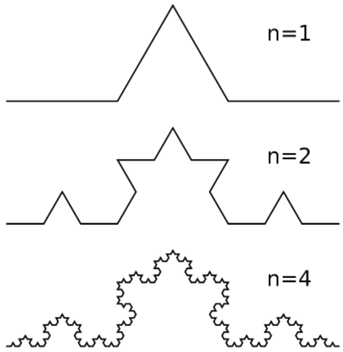
```
#include <iostream>
#include <vector>
using namespace std;

int main() {
	int fX, fY, k;
	int x_min, y_min, x_max, y_max;
	cin >> fX >> fY >> k;
	vector< vector<bool> > Field( fX);
	// Переменная Field это двумерный массив с элементами типа boolean
	for (int i = 0; i < fX; i++) {
		Field[i].resize(fY);
	// При определении переменной типа bool C++14 присваивает ей значение "false"
	}

	for (int i = 0; i < k; i++) {
		cin >> x_min >> y_min >>  x_max >>  y_max;
		x_min = max (x_min, 0); // вырбука может выйти за границы леса
		y_min = max (y_min, 0);
```

```
            x_max = min (x_max, fX);
            y_max = min (y_max, fY);

            for (int x= x_min; x < x_max; x++)
    // присваиваем значение “true”, если ячейка попала хотя в одну вырубку
                for (int  y = y_min; y < y_max; y++) {
                    Field[x][y] = true;
                }

    }

    int Area = 0;
    for (int x= x_min; x < x_max; x++) // считаем число нетронутых ячеек
        for (int  y = y_min; y < y_max; y++) {
            if (Field[x][y] != true) {
                Area++;
            }
        }
    cout << Area << endl;

    return 0;
}
```

Задача 6.

А) Пусть нам необходимо измерить площадь некоторого объекта с точностью ε. Разобьем снимок сеткой из квадратов с длиной стороны h. Будем считать, что для каждого квадрата сетки мы умеем определять (вручную или автоматически) принадлежность этого квадрата к одной из трех категорий: «квадрат целиком входит в измеряемый объект», «квадрат целиком входит в дополнение к измеряемому объекту» и «квадрат содержит и точки объекта, и точки его дополнения». Обозначим общее число квадратов N, число квадратов первого вида N_1, второго вида N_2 и третьего вида N_3. Составим две дроби $k_1 = \frac{N_1}{N}$ и $k_2 = \frac{N-N_2}{N}$. Умножая эти величины на общую площадь снимка S, получим значение *внутренней* и *внешней меры* объекта $S_1 = k_1 S$ и $S_2 = k_2 S$. Понятно, что истинное значение площади находится на промежутке $[S\_1, S\_2]$. Теперь начнем увеличивать число квадратов, уменьшая тем самым длину стороны h. В какой-то момент точность определения, к какой категории относится данный квадрат, станет неудовлетворительной. Тогда мы перейдем к снимку с большим разрешением и продолжим процесс. В тот момент, когда величина $S_2 - S_1$ станет меньше заданной нам точности ε, процесс можно остановить, взяв в качестве ответа величину $\frac{S_1+S_2}{2}$.

Б) Пусть нам необходимо измерить «величину границы» некоторого объекта. Разобьем снимок сеткой из квадратов с длиной стороны h. Будем считать, что для каждого квадрата сетки мы умеем определять (вручную или автоматически) принадлежность этого квадрата к одной из трех категорий: «квадрат целиком входит в измеряемый объект», «квадрат целиком входит в дополнение к измеряемому объекту» и «квадрат содержит и точки объекта, и точки его дополнения». Обозначим общее число квадратов N, число квадратов первого вида N_1, второго вида N_2 и третьего вида N_3. Будем считать, что центры квадратов третьего вида лежат на нашей кривой, а длина кривой приблизительно равна длине ломаной, соединяющей эти точки. Тогда эту длину можно приблизительно оценить выражением $l(h) = N_3 h$ (мы считаем, что кривая непрерывным образом соединяет центры соседних квадратов). Теперь начнем увеличивать число квадратов, уменьшая тем самым длину стороны h. В какой-то момент точность определения, к какой категории относится данный квадрат, станет неудовлетворительной. Тогда мы перейдем к снимку с большим разрешением и продолжим процесс. Каков бы ни был измеряемый объект, существует максимальная разумная точность детализации его границы. Например, на береговых линиях отсутствуют детали меньше 1 см, при измерении периметра вырубки нет смысла выбирать детализацию больше, чем среднее расстояние между деревьями в лесу и т.д. Таким образом, возможны два случая. Если нам доступны снимки с требуемой детализацией, то мы просто находим величину $l(h_0)$ для данного h_0 и берем ее в качестве длины границы объекта. Если снимки с требуемой детализацией не доступны, то необходимо определить характер функции $l(h)$ и затем продолжить ее за область определения (экстраполировать) и определить ее предполагаемое значение в точке h_0. Для гладких кривых функция $l(h)$ имеет предел при $h \to 0$. Для реальных кривых величина $l(h)$ при уменьшении h возрастает к бесконечности как $C \cdot h^{-D}$. Таким образом, вначале необходимо экспериментально или с помощью уже имеющихся таблиц определить величину D. Для эмпирического определения величины D найдем натуральный логарифм функции $l(h)$ и заметим, что он должен вести себя как $\ln C - D \cdot \ln h$. Тогда дробь $\frac{\ln l(h)}{\ln h}$ стремится при $h \to 0$ к $-D$. Найдя величину D, можно определить и число C как предел функции $l(h) \cdot h^D$. Параметр D интересен и тогда, когда величина $l(h_0)$ может быть найдена непосредственно. Он показывает «изрезанность», «изгибистость» границы объекта.



В) Заметим, что кривая обладает свойством самоподобия. А именно, та ее часть, которая заключена между точками (0,0) и (1/3,0) есть уменьшенная в три раза копия всей кривой. Часть кривой между точками (1/3,0) и $\left(1/2, \sqrt{3}/2\right)$ также есть копия всей кривой, уменьшенной в три раза и повернутой на 60 градусов. И так далее. Воспользуемся условием пункта Б): при гомотетии с коэффициентом k «длина кривой» должна измениться в k^D раз. В нашем случае кривая есть объединение четырех своих копий, каждая из которых получена уменьшением в три раза. Пусть $l(h)$ – функция, определенная в пункте Б). Получаем

$$l\left(\frac{h}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^D l(h) = \left(\frac{1}{3}\right)^D \cdot 4l\left(\frac{h}{3}\right) \Rightarrow \frac{4}{3^D} = 1\textit{, то есть } D = \log_3 4$$

Ответ: $log_3 4$.

Критерии

Задачи 6а) и 6б) оценивались совместно, задача 6в) независимо от них.

За каждую из задач выставлялись оценки “+” – решена верно, “+.” – есть несущественные ошибки (приравнивается к “+”), “+/-“ – решение, в целом, верное, “-/+” – есть верная идея решения.

Критерии общей оценки:

Нет чистых плюсов, нет плюс/минусов=0.
Нет чистых плюсов, есть ровно один плюс/минус и больше ничего=0.
Нет чистых плюсов, есть плюс/минус и еще плюс/минус или минус/плюс=30.
Ровно один чистый плюс, нет плюс/минусов=40.
Ровно один чистый плюс, ровно один плюс/минус и больше ничего=45.
Ровно один чистый плюс, есть плюс/минус и еще плюс/минус или минус/плюс=50.
Ровно два чистых плюса, нет плюс/минусов=50.
Ровно два чистых плюса, ровно один плюс/минус и больше ничего=55.
Ровно два чистых плюса, есть плюс/минус и еще плюс/минус или минус/плюс=60.
Ровно три чистых плюса, нет плюс/минусов=60.
Ровно три чистых плюса, ровно один плюс/минус и больше ничего =65.
Ровно три чистых плюса, есть плюс/минус и еще плюс/минус или минус/плюс=70.
Ровно четыре чистых плюса, нет плюс/минусов=70.
Ровно четыре чистых плюса, ровно один плюс/минус и больше ничего =75.
Ровно четыре чистых плюса, есть плюс/минус и еще плюс/минус или минус/плюс=80.
Ровно пять чистых плюсов, нет плюс/минусов=80.
Ровно пять чистых плюсов, ровно один плюс/минус и больше ничего =85.
Ровно пять чистых плюсов, есть плюс/минус и еще плюс/минус или минус/плюс=90.
Ровно шесть чистых плюсов, нет плюс/минусов=90.
Ровно шесть чистых плюсов и есть один плюс/минус=95.
Ровно семь чистых плюсов =100.