Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Заключительный этап 2018/2019 учебного года для 9 класса

Задача 1. Вася и Петя выбежали одновременно с места старта круговой беговой дорожки и побежали в противоположных направлениях. На бегу в некотором месте дорожки они встретились. Вася пробежал полный круг и, продолжая бег в том же направлении, добежал до места их прежней встречи в тот момент, когда Петя пробежал полный круг. Во сколько раз Вася бежал быстрее Пети?

Ответ: $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Решение. Пусть v — скорость Пети, xv — скорость Васи, t — время, за которое они добрались до места встречи. Тогда из условия имеем уравнение $\dfrac{(1+x)vt}{xv} = \dfrac{xvt}{v}$, откуда $x^2 = 1 + x$, $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Ответ к варианту 2: $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Задача 2. Расстояние между корнями квадратного трёхчлена $x^2 + px + q$ равно 1. Найдите коэффициенты p и q, если известно, что они являются простыми числами.

Ответ: $p = 3$, $q = 2$.

Решение. Квадрат расстояния между корнями трёхчлена равен

$$|x_1 - x_2|^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = p^2 - 4q = 1,$$

откуда получаем $(p-1)(p+1) = 4q$. Оба множителя, стоящих в левой части, — чётные, и один из них делится на 4, поэтому $4q$ делится на 8. Поскольку q простое, $q = 2$, откуда $p = 3$.

Ответ к варианту 2: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Задача 3. Стрелочные часы показывают ровно час. Комар и муха сидят на одинаковом расстоянии от центра на часовой и минутной стрелках соответственно. Когда стрелки совпадают, насекомые меняются местами. Во сколько раз расстояние, которое за полсуток преодолел комар, больше расстояния, которое преодолела за это же время муха?

Ответ: 83/73.

Решение. Комар и муха движутся по кругу. За первый час комар преодолеет 11/12 этого круга (в начале был на часовой стрелке, указывающей на час, в конце — на минутной, указывающей на 12). За второй час комар преодолеет 3/12 круга (был на минутной, указывающей на 12, стал на часовой, указывающей на 3). Таким образом, комар преодолел 14/12 круга за первые 2 часа. За следующие 2 часа он также преодолеет 14/12 круга, и т. д. Получим, что за 10 часов он прошёл $5 \cdot 14/12 = 70/12$ круга. Одиннадцатый час начинается с того, что комар на часовой стрелке, указывающей на 11, минутная указывает на 12. Комар за этот час проделает 1/12 круга и в конце окажется на минутной стрелке. За последний, двенадцатый час минутная и часовая стрелки не встретятся, комар пройдёт один круг. Итак, за полсуток комар преодолеет расстояние $A = 70/12 + 1/12 + 1 = 83/12$. Аналогично рассуждая для мухи, получим расстояние $B = 5 \cdot (2/12 + 10/12) + 1 + 1/12 = 73/12$. Отсюда $A/B = 83/73$.

Ответ к варианту 2: 72/71.

Задача 4. Каждую клетку таблицы 3×3 раскрашивают в один из трёх цветов так, что клетки, имеющие общую сторону, имеют разный цвет. Среди всех возможных таких раскрасок найдите долю тех, в которых использовано ровно два цвета.

Ответ: 1/41.

Решение. Центральную клетку можно раскрасить в любой из трёх цветов, назовём этот цвет a. Каждую из четырёх клеток, имеющих общую сторону с центральной, можно раскрасить в любой из двух оставшихся цветов. Пусть клетка, расположенная над центральной, раскрашена в цвет b. Третий цвет назовём c. Рассмотрим всевозможные варианты раскраски клеток, имеющих общую сторону с центральной, и закодируем их строчками из букв b и c, которые начинаются с буквы b, а затем соответствуют цветам этих клеток, пробегаемых против часовой стрелки. Например, раскраска

	b	
c	a	b
	c	

будет закодирована строчкой $bccb$.

Рассмотрим любую угловую клетку. Если две клетки, имеющие с ней общую сторону, раскрашены в один цвет, то угловую клетку можно раскрасить двумя способами. Если же эти две клетки раскрашены в разные цвета, то угловую клетку можно раскрасить только одним способом. Составим таблицу, в которой для каждой из 8 полученных кодирующих строчек укажем число раскрасок угловых клеток.

$bbbb$	16	$bbcb$	4	$bcbb$	4	$bccb$	4
$bbbc$	4	$bbcc$	4	$bcbc$	1	$bccc$	4

Таким образом, искомое число раскрасок равно произведению числа способов раскрасить центральную клетку на число способов раскрасить клетку, расположенную над центральной, на сумму чисел построенной таблицы: $3 \cdot 2 \cdot (16 + 6 \cdot 4 + 1) = 246$.

Число же двухцветных таблиц равно 6, так как цвет центральной клетки в этом случае совпадает с цветом угловых клеток, а для клеток, имеющих общую сторону с центральной, всегда есть два возможных варианта. Отсюда получаем, что искомое отношение равно $\frac{1}{41}$.

Ответ к варианту 2: 40/41.

Задача 5. Числа a, b и c удовлетворяют равенству $\sqrt{a} = \sqrt{b} + \sqrt{c}$. Найдите a, если $b = 52 - 30\sqrt{3}$ и $c = a - 2$.

Ответ: $a = 27$.

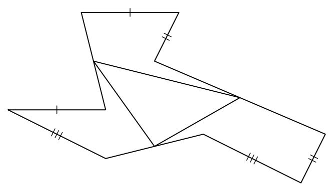
Решение. Имеем

$$\sqrt{b} = \sqrt{52 - 30\sqrt{3}} = \sqrt{27 - 2 \cdot 5 \cdot 3\sqrt{3} + 25} = 3\sqrt{3} - 5.$$

Следовательно, $\sqrt{a} - \sqrt{a-2} = 3\sqrt{3} - 5$, $\dfrac{2}{\sqrt{a} + \sqrt{a-2}} = \dfrac{2}{3\sqrt{3} + 5}$, $\sqrt{a} + \sqrt{a-2} = \sqrt{27} + \sqrt{25}$. Поскольку функция $f(a) = \sqrt{a} + \sqrt{a-2}$ возрастает и $f(27) = 0$, единственным решением данного уравнения является $a = 27$.

Ответ к варианту 2: $c = 16$.

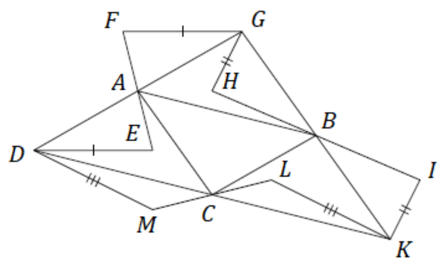
Задача 6. Лёшин дачный участок имеет форму девятиугольника, у которого есть три пары равных и параллельных сторон (см. рисунок). Лёша знает, что площадь треугольника с вершинами в серединах оставшихся сторон девятиугольника равна 12 соток. Помогите ему найти площадь всего дачного участка.



Ответ: 48 соток.

Решение. Пусть $DEFGHIKLM$ — данный девятиугольник, ABC — треугольник с вершинами в серединах оставшихся (неотмеченных) сторон. Из условия следует, что четырёхугольник $DFGE$ — параллелограмм, так как его противоположные стороны DE и FG равны и параллельны. В параллелограмме диагонали точкой пересечения делятся пополам, следовательно, точки D, A, G лежат на одной прямой. Кроме того, $DA = AG$.

Аналогично рассуждая про четырёхугольники $HGIK$ и $KMDL$, получаем, что точка B лежит на прямой GK, точка C лежит на прямой DK, и $GB = BK$, $KC = CD$.



Площадь девятиугольника $DEFGHIKLM$ равна площади треугольника DGK, так как треугольники AFG, BIK и CMD равны соответственно треугольникам AED, BHG и CLK. Наконец, A, B, C — середины сторон треугольника DGK, а значит, его площадь в 4 раза больше площади треугольника ABC. Таким образом, площадь всего дачного участка равна

$$S_{DEFGHIKLM} = 4S_{ABC} = 48 \text{ соток.}$$

Ответ к варианту 2: 32 сотки.

Задача 7. Какое из чисел больше: $\dfrac{1}{99}$ или

$$\frac{1}{9903}+\frac{1}{9903+200}+\frac{1}{9903+200+202}+\ldots+\frac{1}{9903+200+202+\ldots+2018}?$$

Ответ: Первое.

Решение. Пусть A — второе из данных чисел. Уменьшим все знаменатели числа A на 3, полученное число B будет больше, чем A:

$$A<B=\frac{1}{9900}+\frac{1}{9900+200}+\frac{1}{9900+200+202}+...+\frac{1}{9900+200+202+...+2018}.$$

Рассмотрим знаменатели дробей числа B. Заметим, что $9900=99\cdot 100$. Следующий знаменатель равен $99\cdot 100+200=100\cdot 101$. Следующий равен $100\cdot 101+202=101\cdot 102$, и т. д. Последний знаменатель будет равен $1009\cdot 1010$. Значит,

$$B=\frac{1}{99\cdot 100}+\frac{1}{100\cdot 101}+\frac{1}{101\cdot 102}+\ldots+\frac{1}{1009\cdot 1010}=$$

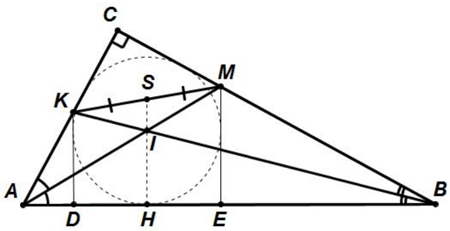
$$=\frac{1}{99}-\frac{1}{100}+\frac{1}{100}-\frac{1}{101}+\frac{1}{101}-\frac{1}{102}+\ldots+\frac{1}{1009}-\frac{1}{1010}=\frac{1}{99}-\frac{1}{1010}<\frac{1}{99}.$$

Таким образом, $A<B<\dfrac{1}{99}$.

Ответ к варианту 2: Первое.

Задача 8. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C точки P и Q — середины биссектрис, проведённых из вершин A и B. Вписанная в треугольник окружность касается гипотенузы в точке H. Найдите угол PHQ.

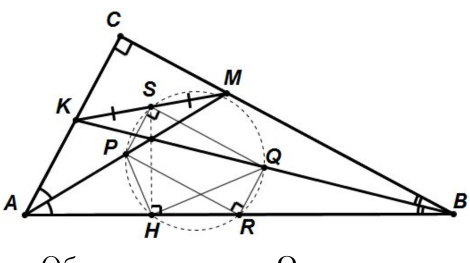
Ответ: $90°$.



Решение. Докажем сначала следующую лемму.

Лемма. Пусть в прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C=90°$) I — точка пересечения биссектрис AM и BK, S — середина KM, вписанная в треугольник окружность касается гипотенузы в точке H. Тогда точки S, I и H лежат на одной прямой.

Доказательство. Обозначим через D и E проекции точек K и M на гипотенузу AB (см. рис.). Тогда $\triangle DKB=\triangle CKB$ по гипотенузе и острому углу, следовательно, $\angle DKB=\angle CKB$, то есть KB — биссектриса внешнего угла $\triangle AKD$, а AI — биссектриса его внутреннего угла. Значит, I — центр вневписанной окружности $\triangle AKD$, поэтому DI — биссектриса угла KDE. Аналогично доказывается, что EI является биссектрисой угла MDE. Таким образом, $\triangle DIE$ — прямоугольный и равнобедренный, то есть IH — серединный перпендикуляр к DE. Точка S, будучи серединой боковой стороны прямоугольной трапеции $DKME$, также лежит на серединном перпендикуляре к DE. Поэтому точки S, I и H лежат на одной прямой. Лемма доказана.



Пользуясь леммой, докажем теперь, что $\angle PHQ=90°$. Пусть R — середина гипотенузы AB. Тогда PS и RQ являются средними линиями в треугольниках $\triangle AKM$ и $\triangle AKB$, поэтому $PS\parallel AK\parallel QR$ и $PS=\dfrac{1}{2}AK=QR$, значит, $PSQR$ — параллелограмм. Более того, $\angle PSQ=90°$, так как его стороны сонаправлены сторонам угла $\angle ACB=90°$. Значит, $PSQR$ — прямоугольник.

Обозначим через Ω окружность, описанную около прямоугольника $PSQR$. Из леммы следует, что $\angle SHR=90°$. Поскольку $\angle SPR=\angle SHR$, точка H лежит на окружности Ω. Следовательно, $\angle PHQ=\angle PRQ=90°$ (как вписанные углы, опирающиеся на диаметр PQ).

Ответ к варианту 2: $90°$.