Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Заключительный этап 2018/2019 учебного года для 7–8 классов

Задача 1. У Миши есть набор из девяти карточек с буквами слова «ЛОМОНОСОВ». На оборотной стороне каждой карточки Миша написал по цифре так, что на карточках с одинаковыми буквами цифры одинаковы, а на карточках с разными буквами — различны. При этом оказалось верным равенство

$$\text{Л} + \frac{\text{О}}{\text{М}} + \text{О} + \text{Н} + \frac{\text{О}}{\text{С}} = \text{ОВ},$$

в котором обе входящие в него дроби являются правильными. Какие цифры мог написать Миша на карточках? Найдите все решения.

Ответ: $8 + \dfrac{2}{3} + 2 + 9 + \dfrac{2}{6} = 20$ и варианты, в которых переставлены местами пары цифр 8 и 9, 3 и 6.

Решение. Левая часть оказавшегося верным равенства меньше величины $10 + 9 + 10 = 29$, а значит, цифра, соответствующая букве «О», может оказаться либо единицей, либо двойкой. При этом должно выполняться равенство $\dfrac{\text{О}}{\text{М}} + \dfrac{\text{О}}{\text{С}} = 1$. Отсюда следует, что на карточке с буквой «О» может оказаться только цифра 2, а значит, на карточках с буквами «М» и «С» написаны (в любом порядке) цифры 3 и 6. В таком случае справедливо неравенство $\text{Л} + \text{Н} + 1 + 2 \geqslant 20$, из которого восстанавливаются значения цифр на оставшихся карточках.

Ответ к варианту 2: $8 + \dfrac{2}{3} + 2 + 9 + \dfrac{2}{6} = 20$ и варианты, в которых переставлены местами пары цифр 8 и 9, 3 и 6.

Задача 2. Убедитесь, что $1009 = 15^2 + 28^2$, и представьте число 2018 в виде суммы двух квадратов натуральных чисел.

Ответ: $2018^2 = 13^2 + 43^2$.

Решение. Данное в условии равенство проверяется непосредственно. Пусть $a = 15$, $b = 28$. Тогда $1009 = a^2 + b^2$, $2018 = 2a^2 + 2b^2 = (a + b)^2 + (a - b)^2 = 13^2 + 43^2$.

Ответ к варианту 2: $3866^2 = 29^2 + 55^2$.

Задача 3. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведены биссектриса BD и высота CH. Из вершины C на биссектрису BD опущен перпендикуляр CK. Найдите угол HCK, если $BK : KD = 3 : 1$.

Ответ: 30°.

Решение. Пусть M — середина BD. Тогда CM — медиана прямоугольного треугольника CBD и $CM = MB = MD$. Кроме того, CK является высотой и медианой треугольника MCD, поэтому $MC = CD$ и треугольник CMD равносторонний. Тогда $\angle CDM = 60^\circ$ и $\angle CBM = \angle CBD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, следовательно, $\angle CBA = 2\angle CBD = 60^\circ$. Отсюда $\angle BCH = 30^\circ$, $\angle HCK = 90^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 30^\circ$.

Ответ к варианту 2: 30°.

Задача 4. Стрелочные часы показывают ровно час. Комар и муха сидят на одинаковом расстоянии от центра на часовой и минутной стрелках соответственно. Когда стрелки совпадают, насекомые меняются местами. Во сколько раз расстояние, которое за полсуток преодолел комар, больше расстояния, которое преодолела за это же время муха?

Ответ: $83/73$.

Решение. Комар и муха движутся по кругу. За первый час комар преодолеет $11/12$ этого круга (в начале был на часовой стрелке, указывающей на час, в конце — на минутной, указывающей на 12). За второй час комар преодолеет $3/12$ круга (был на минутной, указывающей на 12, стал на часовой, указывающей на 3). Таким образом, комар преодолел $14/12$ круга за первые 2 часа. За следующие 2 часа он также преодолеет $14/12$ круга, и т. д. Получим, что за 10 часов он прошёл $5 \cdot 14/12 = 70/12$ круга. Одиннадцатый час начинается с того, что комар на часовой стрелке, указывающей на 11, минутная указывает на 12. Комар за этот час проделает $1/12$ круга и в конце окажется на минутной стрелке. За последний, двенадцатый час минутная и часовая стрелки не встретятся, комар пройдёт один круг. Итак, за полсуток комар преодолеет расстояние $A = 70/12 + 1/12 + 1 = 83/12$. Аналогично рассуждая для мухи, получим расстояние $B = 5 \cdot (2/12 + 10/12) + 1 + 1/12 = 73/12$. Отсюда находим $A/B = 83/73$.

Ответ к варианту 2: $72/71$.

Задача 5. Каждую клетку таблицы 3×3 раскрашивают в один из трёх цветов так, что клетки, имеющие общую сторону, имеют разный цвет. Среди всех возможных таких раскрасок найдите долю тех, в которых использовано ровно два цвета.

Ответ: $1/41$.

Решение. Центральную клетку можно раскрасить в любой из трёх цветов, назовём этот цвет a. Каждую из четырёх клеток, имеющих общую сторону с центральной, можно раскрасить в любой из двух оставшихся цветов. Пусть клетка, расположенная над центральной, раскрашена в цвет b. Третий цвет назовём c. Рассмотрим всевозможные варианты раскраски клеток, имеющих общую сторону с центральной, и закодируем их строчками из букв b и c, которые начинаются с буквы b, а затем соответствуют цветам этих клеток, пробегаемых против часовой стрелки. Например, раскраска

	b	
c	a	b
	c	

будет закодирована строчкой $bccb$.

Рассмотрим любую угловую клетку. Если две клетки, имеющие с ней общую сторону, раскрашены в один цвет, то угловую клетку можно раскрасить двумя способами. Если же эти две клетки раскрашены в разные цвета, то угловую клетку можно раскрасить только одним способом. Составим таблицу, в которой для каждой из 8 полученных кодирующих строчек укажем число раскрасок угловых клеток.

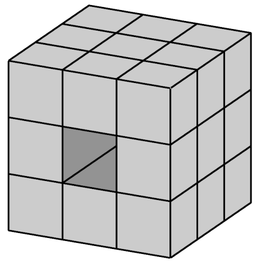
$bbbb$	16	$bbcb$	4	$bcbb$	4	$bccb$	4
$bbbc$	4	$bbcc$	4	$bcbc$	1	$bccc$	4

Таким образом, искомое число раскрасок равно произведению числа способов раскрасить центральную клетку на число способов раскрасить клетку, расположенную над центральной, на сумму чисел построенной таблицы: $3 \cdot 2 \cdot (16 + 6 \cdot 4 + 1) = 246$.

Число же двухцветных таблиц равно 6, так как цвет центральной клетки в этом случае совпадает с цветом угловых клеток, а для клеток, имеющих общую сторону с центральной, всегда есть два возможных варианта. Отсюда получаем, что искомое отношение равно $\frac{1}{41}$.

Ответ к варианту 2: $40/41$.

Задача 6. Из 24 одинаковых деревянных кубиков склеили «трубу» — куб $3 \times 3 \times 3$ с убранной «сердцевиной» из трёх кубиков (см. рисунок). Можно ли в каждом квадратике на поверхности «трубы» провести диагональ так, чтобы получился замкнутый путь, который ни через одну вершину не проходит дважды?



Ответ: Нет.

Решение. Диагоналей на поверхности «трубы» столько же, сколько граней кубиков на этой поверхности: $4 \cdot 9 + 2 \cdot 8 + 12 = 64$. Несамопересекающийся замкнутый путь, проходящий по всем диагоналям, должен содержать столько же вершин. Вершин всех кубиков также 64 (четыре «слоя» по 16 вершин — задействованы все узловые точки куба $3 \times 3 \times 3$). Раскрасим их в чёрный и белый цвета в шахматном порядке: у каждой вершины соседние другого цвета. Получится по 32 вершины каждого цвета. Но искомый путь может проходить только через вершины одного цвета, и поэтому может содержать не более 32 диагоналей.

Ответ к варианту 2: Нет.

Задача 7. На столе лежат карточки с числами от 1 до 8: одна карточка с числом 1, две с числом 2, три с числом 3, и т. д. Петя и Вася поочерёдно берут по одной карточке и складывают в одну колоду (начинает Петя). После очередного хода Васи Петя может сказать «стоп», и тогда все невыбранные карточки убираются со стола, а далее Вася и Петя поочерёдно выбирают любые карточки из получившейся колоды (начинает Вася) и выкладывают их на стол слева направо. Если после того, как на стол будет выложена последняя карточка, получившееся число будет являться разностью квадратов каких-то целых чисел, побеждает Вася, иначе побеждает Петя. Может ли кто-то из игроков действовать так, чтобы обеспечить себе выигрыш независимо от действий другого?

Ответ: Да, может (Вася).

Решение. Во-первых, заметим, что в виде разности квадратов целых чисел представимо любое нечётное число, так как $2k+1 = (2k+1)^2 - k^2$, и любое число делящееся на 4, так как $4k = (k+1)^2 - (k-1)^2$. Во-вторых, в силу условий задачи последнюю карточку из стопки будет класть Петя. Если среди двух оставшихся в конце цифр есть хотя бы одна нечётная, Вася оставит её Пете и выиграет игру. Если среди двух оставшихся в конце цифр остались только чётные, и хотя бы одна из них делится на 4, то Вася оставляет Пете карточку с цифрой, делящейся на 4, и также выигрывает игру. Следовательно, единственный случай, когда Петя может выиграть, это когда в конце остаются две чётные цифры, не делящиеся на 4.

Назовём цифры, делящиеся на 4, и нечётные цифры «хорошими», а остальные — «плохими». Заметим, что исходно карточек с «хорошими» цифрами больше, поэтому в первой части игры Вася всегда может выбирать карточки с «хорошими» цифрами, тогда в получившейся стопке их будет не меньше половины. Если Вася всегда будет класть на стол карточки с «плохими» цифрами, пока они есть, то в конце, среди двух оставшихся карточек будет по крайней мере одна с «хорошей» цифрой, и Вася выиграет.

Ответ к варианту 2: Да, может (Оля).