Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2018/2019 учебного года для 10—11 классов

Ответы и решения

1.1. Из поселка на станцию по одной дороге одновременно отправились дачник А пешком и мотоцикл с пассажиром — дачником Б. Не доехав до станции, мотоциклист высадил пассажира и сразу поехал обратно к поселку, а дачник Б пошел к станции пешком. Встретив дачника А, мотоциклист посадил его к себе и привез на станцию. В результате оба дачника прибыли на станцию одновременно. Какую часть пути от поселка до станции дачник А проехал на мотоцикле, если дачники шли с одинаковой скоростью, в 9 раз меньшей скорости мотоцикла?

Ответ: $\frac{5}{6}$.

Решение. Примем путь от поселка до станции за 1. Поскольку оба дачника потратили на путь до станции одно и то же время и пользовались одним и тем же мотоциклом, то расстояние, пройденное ими пешком, одно и то же (это можно увидеть также и на графиках их движения). Обозначим это расстояние через x. Тогда путь, который проехал мотоциклист до встречи с дачником А, равен $(1-x)+(1-2x)=2-3x$. Так как скорость мотоциклиста в 9 раз больше скорости дачника, выполняется равенство $2-3x=9x$, откуда $x=1/6$.

1.2. Из посёлка на станцию по одной дороге одновременно отправились дачник А пешком и мотоцикл с пассажиром — дачником Б. Не доехав до станции, мотоциклист высадил пассажира и сразу поехал обратно к посёлку, а дачник Б пошел к станции пешком. Встретив дачника А, мотоциклист посадил его к себе и привёз на станцию. В результате оба дачника прибыли на станцию одновременно. Сколько процентов пути от поселка до станции дачник Б прошёл пешком, если дачники шли с одинаковой скоростью, в 7 раз меньшей скорости мотоцикла?

Ответ: 20%.

1.3. Из посёлка на станцию по одной дороге одновременно отправились дачник А — пешком и дачник Б — на такси. Не доехав до станции, таксист высадил своего пассажира и сразу поехал обратно к посёлку, а дачник Б пошел к станции пешком. Встретив дачника А, таксист подсадил его к себе и привёз на станцию. В результате оба дачника прибыли на станцию одновременно. Какую часть пути от посёлка до станции дачник А проехал на такси, если дачники шли с одинаковой скоростью, в 15 раз меньшей скорости такси?

Ответ: $\frac{8}{9}$.

1.4. Из посёлка на станцию по одной дороге одновременно отправились дачник А — пешком и дачник Б — на такси. Не доехав до станции, таксист высадил своего пассажира и сразу поехал обратно к посёлку, а дачник Б пошел к станции пешком. Встретив дачника А, таксист подсадил его к себе и привёз на станцию. В результате оба дачника прибыли на станцию одновременно. Сколько процентов пути от посёлка до станции дачник Б прошёл пешком, если дачники шли с одинаковой скоростью, в 17 раз меньшей скорости такси?

Ответ: 10%.

2.1. Найдите целую часть числа $a+\dfrac{9}{b}$, где a и b — соответственно целая и дробная часть числа $\sqrt{76-42\sqrt{3}}$.

Ответ: 12.

Решение. Данное число равно $\sqrt{76-42\sqrt{3}}=\sqrt{\left(7-3\sqrt{3}\right)^2}=7-3\sqrt{3}=1+\left(6-3\sqrt{3}\right)$, где $6-3\sqrt{3}\in(0;1)$. Поэтому $a=1$, $b=6-3\sqrt{3}$. Значит, $a+\frac{9}{b}=1+\frac{9}{6-3\sqrt{3}}=1+\frac{3}{2-\sqrt{3}}=1+3\left(2+\sqrt{3}\right)=7+3\sqrt{3}$. Так как $12<7+3\sqrt{3}<13$, то целая часть числа $a+\frac{9}{b}$ равна 12.

2.2. Найдите целую часть числа $a+\dfrac{8}{b}$, где a и b — соответственно целая и дробная часть числа $\sqrt{48-24\sqrt{3}}$.

Ответ: 16.

2.3. Найдите целую часть числа $a+\dfrac{9}{b}$, где a и b — соответственно целая и дробная часть числа $\sqrt{12-6\sqrt{3}}$.

Ответ: 34.

2.4. Найдите целую часть числа $a+\dfrac{8}{b}$, где a и b — соответственно целая и дробная часть числа $\sqrt{19-8\sqrt{3}}$.

Ответ: 31.

3.1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2^{x+2y} + 2^x = 3 \cdot 2^y, \\ 2^{2x+y} + 2 \cdot 2^y = 4 \cdot 2^x. \end{cases}$$

Ответ: $x = y = \frac{1}{2}$.

Решение.

$$\begin{cases} 2^x \cdot (2^y)^2 + 2^x = 3 \cdot 2^y, \\ (2^x)^2 \cdot 2^y + 2 \cdot 2^y = 4 \cdot 2^x \end{cases}$$

$$2^x = u\ (>0), \quad 2^y = v\ (>0)$$

$$\begin{cases} uv^2 + u - 3v = 0, \\ u^2 v + 2v - 4u = 0. \end{cases}$$

$$uv^2 - u^2 v + u - 2v - 3v + 4u = 0,$$

$$uv(v-u) + 5(u-v) = 0,$$

$$uv(v-u) - 5(v-u) = 0,$$

$$(uv-5)(v-u) = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} uv = 5 \\ v - u = 0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} u = \frac{5}{v} \\ u = v \end{array}\right.$$

$$u = \frac{5}{v}$$

$$\frac{5}{v} \cdot v^2 + \frac{5}{v} - 3v = 0$$

$$5v + \frac{5}{v} - 3v = 0$$

$$2v + \frac{5}{v} = 0$$

$$2v^2 + 5 = 0$$

(нет решений)

$$u = v$$

$$v^3 - 2v = 0$$

$$v = 0, \quad v = \pm\sqrt{2}$$

$$2^x = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

3.2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2^{x+y} - 2^{x-y} = 4, \\ 2^{x+y} - 8 \cdot 2^{y-x} = 6. \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{5}{2}$, $y = \frac{1}{2}$.

Решение.

$$2^{x+y} = u\ (>0), \quad 2^{y-x} = v\ (>0)$$

$$\begin{cases} u - v = 4, \\ u - \frac{8}{v} = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = v + 4, \\ v + 4 - \frac{8}{v} = 6 \end{cases}$$

$$v^2 + 4v - 6v - 8 = 0$$

$$v^2 - 2v - 8 = 0$$

$$\left[\begin{array}{c} v = 4 \\ v = -2 \text{ (посторонний корень)} \end{array}\right. \Rightarrow u = 4 + 4 = 8$$

$$\begin{cases} 2^{x-y} = 4 \\ 2^{x+y} = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$2x = 5, \quad 2y = 1$$

$$x = \frac{5}{2}, \quad y = \frac{1}{2}$$

3.3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3^{x+2y} + 3^x = 4 \cdot 3^y, \\ 3^{2x+y} + 2 \cdot 3^y = 5 \cdot 3^x. \end{cases}$$

Ответ: $x = y = \frac{1}{2}$.

3.4. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3^{x+y} - 3^{x-y} = 18, \\ 3^{x+y} - 27 \cdot 3^{y-x} = 24. \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{5}{2}$, $y = \frac{1}{2}$.

4.1. На стороне AC треугольника ABC взяты точки E и K, причём точка E лежит между точками A и K и $AE : EK : KC = 3 : 5 : 4$. Медиана AD пересекает отрезки BE и BK в точках L и M соответственно. Найдите отношение площадей треугольников BLM и ABC.

Ответ: $\frac{1}{5}$.

Решение. Так как медиана треугольника делит его площадь пополам, то $S(ABD) = S(ADC)$ и $S(BMD) = S(MDC)$, а значит, $S(ABM) = S(AMC) = \frac{3}{2}S(AMK)$. В то же время $\frac{S(ABM)}{S(AMK)} = \frac{BM}{MK}$, поэтому $\frac{BM}{MK} = \frac{3}{2}$. Отсюда $\frac{S(BLM)}{S(LMK)} = \frac{3}{2}$, а значит, $S(ABL) = \frac{3}{2}S(ALK) = \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{3}S(ALE) = 4S(ALE)$. Поэтому $\frac{BL}{LE} = \frac{S(ABL)}{S(ALE)} = 4$. По теореме об отношении площадей треугольников с общим углом $\frac{S(BLM)}{S(BEK)} = \frac{BL}{BE} \cdot \frac{BM}{BK} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{25}$. В то же время $\frac{S(BEK)}{S(ABC)} = \frac{EK}{AC} = \frac{5}{12}$. Окончательно получим, что $\frac{S(BLM)}{S(ABC)} = \frac{S(BLM)}{S(BEK)} \cdot \frac{S(BEK)}{S(ABC)} = \frac{12}{25} \cdot \frac{5}{12} = \frac{1}{5}$.

4.2. В треугольнике ABC на стороне BC отмечена такая точка D, что $BD : DC = 1 : 5$, а на стороне AC — точки E и K, причём точка E лежит между точками A и K. Отрезок AD пересекается с отрезками BE и BK в точках M и N соответственно, причём $BM : ME = 3 : 4$, $BN : NK = 2 : 3$. Найдите отношение $AM : ND$.

Ответ: $120 : 49$.

4.3. В треугольнике ABC на стороне AC отмечены такие точки E и K, что $AE = EK = KC$. На стороне BC взята такая точка D, что отрезок AD пересекает отрезки BE и BK в точках N и M соответственно, причём $AN : NM = 4 : 3$. Найдите отношение площади четырёхугольника $CKMD$ к площади треугольника ABC.

Ответ: $\frac{1}{6}$.

4.4. В треугольнике ABC на стороне BC отмечена такая точка D, что $BD : DC = 1 : 3$, а на стороне AC — точки E и K, причём точка E лежит между точками A и K. Отрезок AD пересекается с отрезками BE и BK в точках M и N соответственно, причём $BM : ME = 7 : 5$, $BN : NK = 2 : 3$. Найдите отношение $MN : AD$.

Ответ: $11 : 45$. *Решение.* Используем теорему Менелая 1)

$$\frac{AN}{ND}\frac{DB}{DC}\frac{CK}{KA} = 1$$

$$\frac{AN}{ND}\frac{1}{4}\frac{CK}{KA} = 1$$

2)

$$\frac{BD}{DC}\frac{CA}{AK}\frac{KN}{NB} = 1$$

$$\frac{1}{3}\frac{CA}{AK}\frac{3}{2} = 1$$

$$\frac{CA}{AK} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{CK}{KA} = 1$$

3)

$$\frac{AN}{ND} = \frac{4}{1}$$

4)

$$\frac{AM}{MD}\frac{DB}{BC}\frac{CE}{EA} = 1$$

$$\frac{AM}{MD}\frac{x}{4x}\frac{CE}{EA} = 1$$

5)

$$\frac{BD}{DC}\frac{CA}{AE}\frac{EM}{MB} = 1$$

$$\frac{x}{3x}\frac{CA}{AE}\frac{EM}{MB} = 1$$

$$\frac{1}{3}\frac{CA}{AE}\frac{5}{7} = 1$$

$$\frac{CA}{AE} = \frac{21}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{CE}{EA} = \frac{16}{5}$$

6)

$$\frac{AM}{MD}\frac{1}{4}\frac{16}{5} = 1$$

$$\frac{AM}{MD} = \frac{5}{4}$$

Имеем из полученных соотношений, обозначив

$$AN = 4p,\ ND = p, AN = 5\kappa, MD = 4\kappa :$$

$$AD = 5\kappa + 4\kappa = 5p$$

$$\kappa = \frac{5}{9}p$$

$$\frac{MN}{AD} = \frac{4\kappa - p}{5p} = \frac{4\frac{5}{9}p - p}{5p} = \frac{11}{45}$$

5.1. Про последовательность $\{a_n\}$ известно, что $a_1 = 1{,}5$ и $a_n = \dfrac{1}{n^2-1}$ при $n \in \mathbb{N},\ n > 1$. Существуют ли такие значения n, что сумма первых n членов этой последовательности отличается от $2{,}25$ меньше, чем на $0{,}01$? Если да, то найдите наименьшее из них.

Ответ: да, $n = 100$.

Решение. Общая формула членов последовательности (кроме первого) может быть записана так ($n \geqslant 2$):

$$a_n = \frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right).$$

В результате сумма первых n членов последовательности, кроме первого, принимает вид:

$$\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right) + \right.$$
$$\left. + \ldots + \left(\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right].$$

После сокращений для суммы n первых членов последовательности можно записать:

$$S_n = 1{,}5 + \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] = 2{,}25 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right).$$

Пусть $f(n) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$. Тогда поскольку $f(n)$ убывает и

$$f(100) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{101}\right) < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100}\right) = \frac{1}{100},$$
$$f(99) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{99} + \frac{1}{100}\right) > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100}\right) = \frac{1}{100},$$

искомое значение n равно 100.

5.2. Про последовательность $\{a_n\}$ известно, что $a_1 = 1{,}25$ и $a_n = \dfrac{2}{n^2-1}$ при $n \in \mathbb{N},\ n > 1$. Существуют ли такие значения n, что сумма первых n членов этой последовательности отличается от $2{,}75$ меньше, чем на $0{,}01$? Если да, то найдите наименьшее из них.

Ответ: да, $n = 200$.

5.3. Про последовательность $\{a_n\}$ известно, что $a_1 = 1{,}5$ и $a_n = \dfrac{3}{n^2-1}$ при $n \in \mathbb{N},\ n > 1$. Существуют ли такие значения n, что сумма первых n членов этой последовательности отличается от $3{,}75$ меньше, чем на $0{,}01$? Если да, то найдите наименьшее из них.

Ответ: да, $n = 300$.

5.4. Про последовательность $\{a_n\}$ известно, что $a_1 = 1{,}25$ и $a_n = \dfrac{4}{n^2-1}$ при $n \in \mathbb{N},\ n > 1$. Существуют ли такие значения n, что сумма первых n членов этой последовательности отличается от $4{,}25$ меньше, чем на $0{,}01$? Если да, то найдите наименьшее из них.

Ответ: да, $n = 400$.

6.1. Найдите все решения неравенства

$$\sin^{2018} x + \cos^{-2019} x \geqslant \cos^{2018} x + \sin^{-2019} x,$$

принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

Ответ: $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right) \cup \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi; \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

Решение. Функция $f(t) = t^{2018} - t^{-2019}$ возрастает на каждом из полуинтервалов $[-1, 0)$ и $(0, 1]$. Действительно, производная $f'(t) = t^{-2020}(2018t^{4037} + 2019) = 0$ при $t = -\sqrt[4037]{\frac{2019}{2018}} < -1$, поэтому $f'(t) > 0$ на каждом из полуинтервалов $[-1, 0)$ и $(0, 1]$. Кроме того $f(t) \leqslant 0$, если $0 < t \leqslant 1$, а если $-1 \leqslant t < 0$, то $f(t) \geqslant 2$. Поэтому исходное неравенство эквивалентно совокупности неравенств:

$$f(\sin x) \geqslant f(\cos x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x \geqslant \cos x > 0, \\ 0 > \sin x \geqslant \cos x, \\ \quad \begin{cases} \sin x < 0, \\ \cos x > 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Значит, ответ на периоде от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{7\pi}{4}$ выглядит так: $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right) \cup \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi; \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}\right]$

6.2. Найдите все решения неравенства

$$\cos^{2018} x + \sin^{-2019} x \geqslant \sin^{2018} x + \cos^{-2019} x,$$

принадлежащие отрезку $\left[-\frac{4\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$.

Ответ: $\left[-\frac{4\pi}{3}; -\pi\right) \cup \left[-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right]$.

6.3. Найдите все решения неравенства

$$\sin^{2018} x + \cos^{-2019} x \leqslant \cos^{2018} x + \sin^{-2019} x,$$

принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Ответ: $\left[-\frac{5\pi}{4}; -\pi\right) \cup \left[-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

6.4. Найдите все решения неравенства

$$\cos^{2018} x + \sin^{-2019} x \leqslant \sin^{2018} x + \cos^{-2019} x,$$

принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$.

Ответ: $\left[-\frac{\pi}{3}; 0\right) \cup \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi; \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{3}\right]$

7.1. Сколько существует значений параметра a, при которых уравнение

$$4a^2+3x\lg x+3\lg^2 x=13a\lg x+ax$$

имеет единственное решение?
Ответ: 2.
Решение. Данное уравнение эквивалентно уравнению $(3\lg x-a)(x+\lg x-4a)=0$, откуда имеем совокупность

$$\left[\begin{array}{l}\lg x=\frac{a}{3},\\ x+\lg x=4a.\end{array}\right.$$

Каждое из уравнений этой совокупности при любом a имеет единственное положительное решение, так как непрерывные функции $f_1(x)=\lg x$ и $f_2(x)=x+\lg x$ на области своего определения $(0;+\infty)$ строго возрастают и принимают всевозможные значения из $(-\infty;+\infty)$. Поэтому необходимо, чтобы это решения совпали. Тогда $x=11a/3$, $\lg x=a/3$, следовательно, $10^{a/3}=11a/3$. Это уравнение имеет ровно два решения в силу того, что функция $g(t)=10^t-11t$ строго убывает на $(-\infty;\lg(11\lg e)]$, строго возрастает на $[\lg(11\lg e);+\infty)$, принимает в точке $t=1$ отрицательное значение, а в точках $t=0$ и $t=2$ – положительные значения.

7.2. Сколько существует значений параметра a, при которых уравнение

$$3a^2+4x\lg x+4\lg^2 x=13a\lg x+ax$$

имеет единственное решение?
Ответ: 2.

7.3. Сколько существует значений параметра a, при которых уравнение

$$5a^2+3x\lg x+9\lg^2 x=18a\lg x+ax$$

имеет единственное решение?
Ответ: 2.

7.4. Сколько существует значений параметра a, при которых уравнение

$$5a^2+4x\lg x+12\lg^2 x=23a\lg x+ax$$

имеет единственное решение?
Ответ: 2.

8.1. Боковое ребро правильной пирамиды равно 2. Может ли её объём быть равным 3,25?
Ответ: нет.
Решение. Объём правильной пирамиды меньше объёма описанного вокруг неё конуса. Если обозначить боковое ребро через b, а угол между образующей конуса и основанием через α, то радиус основания конуса равен $b\cos\alpha$, а высота конуса равна $b\sin\alpha$. Таким образом, объём конуса равен $\frac{1}{3}\pi b^2\cos^2\alpha\cdot b\sin\alpha=\frac{1}{3}\pi b^3\cos^2\alpha\sin\alpha$.

Найдём максимум функции $f(\alpha)=\cos^2\alpha\sin\alpha=\sin\alpha-\sin^3\alpha$ при $\alpha\in(0;\frac{\pi}{2})$. Максимум функции $y=t-t^3$ при $t\in(0;1)$ достигается при $1-3t^2=0$, то есть в точке $t=\frac{1}{\sqrt3}$. Таким образом, $f(\alpha)=\sin\alpha-\sin^3\alpha$ при $\alpha\in(0;\frac{\pi}{2})$ может принимать значения от 0 до $\frac{2}{3\sqrt3}$. Значит, объём конуса может принимать значения от 0 до $\frac{2\pi b^3}{9\sqrt3}=\frac{16\pi}{9\sqrt3}$.

Докажем, что $\frac{16\pi}{9\sqrt3}<3{,}25=\frac{13}{4}\Leftrightarrow\pi<\frac{117\sqrt3}{64}$. Последнее неравенство выполняется, так как $\frac{117\sqrt3}{64}>\frac{117\cdot1{,}73}{64}>3{,}16>\pi$. Поэтому пирамиды с объёмом 3,25 не существует.

8.2. Объём правильной пирамиды равен π. Может ли её боковое ребро быть равным 1,98?
Ответ: нет.

8.3. Боковое ребро правильной пирамиды равно 4. Может ли её объём быть равным 26?
Ответ: нет.

8.4. Объём правильной пирамиды равен 8π. Может ли её боковое ребро быть равным 3,96?
Ответ: нет.