

**Олимпиада школьников «Ломоносов»  
по механике и математическому моделированию**

Задания заключительного этапа 2019/2020 учебного года для 7 – 8 классов

---

**Вариант 2020-7-8**

1. Велосипед, мотоцикл и автомобиль стартовали одновременно в одной точке круговой трассы и поехали в одном направлении. Закончили движение они в тот момент, когда впервые после старта опять оказались в одном и том же месте трассы. За это время автомобиль обогнал велосипедиста 15 раз. Сколько всего было обгонов за это время, если мотоцикл медленнее автомобиля, но быстрее велосипеда?
2. Гаврила прошёл с постоянной скоростью вдоль всей границы парка, имеющего форму невыпуклого восьмиугольника  $ABCDEFGH$ , за 34 минуты. Он стартовал в точке  $A$ , затем последовательно прошёл через точки  $B, C, D, E, F, G, H$  и вернулся в точку  $A$ . При этом в точках  $B, C, F, G, H$  он делал поворот на  $90^\circ$  направо, а в точках  $D$  и  $E$  – поворот на  $90^\circ$  налево. За какое время он прошёл сторону  $AB$ , если на участок  $EF$  он затратил 5 минут, а на участок  $HA$  – 8 минут?
3. Деталь состоит из двух, одинаковых по массе частей. Плотность одной части равна  $2/3$  плотности другой. Глафира взвесила деталь, разделила массу на объём и получила результат  $486 \text{ кг/м}^3$ . Можно ли найти плотности обеих частей детали? Если можно, найдите их, если нельзя – обоснуйте невозможность.
4. Гавриле для проведения эксперимента нужно нагреть  $V = 1,25 \text{ л}$  жидкости с удельной теплоёмкостью  $c = 1000 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$  до температуры  $t$  в промежутке от  $80^\circ\text{C}$  до  $90^\circ\text{C}$ . Плотность жидкости  $\rho = 0,8 \text{ г/см}^3$ . Сможет ли Гаврила определить температуру нагретой жидкости с точностью до  $0,5^\circ\text{C}$ , если при лабораторной температуре  $t_0 = 20^\circ\text{C}$  он будет использовать термометр, теплоёмкость которого равна  $C = 10 \text{ Дж/кг}$ ?
5. Белый медведь вышел из точки  $A$ , прошёл 3 км на север, потом 3 км на восток, потом 3 км на юг и оказался снова в точке  $A$ . Другой белый медведь вышел из точки  $B$ , прошёл 5 км на север, потом 5 км на запад, потом 5 км на юг и оказался снова в точке  $B$ .  
Найдите максимально возможное расстояние между точками  $A$  и  $B$ , если допустить, что Земля имеет форму шара радиусом 6370 км и что описанные события произошли севернее экватора.

29 февраля 2020 г.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

**Олимпиада школьников «Ломоносов»**  
**по механике и математическому моделированию**  
Задания заключительного этапа 2019/2020 учебного года для 9 классов

---

**Вариант 2020-9**

1. Велосипед, мотоцикл и автомобиль стартовали одновременно в одной точке круговой трассы и поехали в одном направлении. Закончили движение они в тот момент, когда впервые после старта опять оказались в одном и том же месте трассы. За это время автомобиль обогнал велосипедиста 15 раз. Сколько всего было обгонов за это время, если мотоцикл медленнее автомобиля, но быстрее велосипеда?
2. Гаврила прошёл с постоянной скоростью вдоль всей границы парка, имеющего форму невыпуклого восьмиугольника  $ABCDEFGH$ , за 34 минуты. Он стартовал в точке  $A$ , затем последовательно прошёл через точки  $B, C, D, E, F, G, H$  и вернулся в точку  $A$ . При этом в точках  $B, C, F, G, H$  он делал поворот на  $90^\circ$  направо, а в точках  $D$  и  $E$  – поворот на  $90^\circ$  налево. За какое время он прошёл сторону  $AB$ , если на участок  $EF$  он затратил 5 минут, а на участок  $HA$  – 8 минут?
3. Деталь состоит из двух, одинаковых по массе частей. Плотность одной части равна  $\frac{2}{3}$  плотности другой. Глафира взвесила деталь, разделила массу на объём и получила результат  $486 \text{ кг/м}^3$ . Можно ли найти плотности обеих частей детали? Если можно, найдите их, если нельзя – обоснуйте невозможность.
4. Два шарика одинакового радиуса сброшены вертикально вниз без начальной скорости с башни высотой 100 м. За то время, которое требовалось бы каждому из них, чтобы достичь поверхности при отсутствии атмосферы, первый пролетел только 50 м, а второй – 25 м. Найдите отношение массы первого шарика к массе второго, считая силу сопротивления движению постоянной величиной.
5. Гавриле для проведения эксперимента нужно нагреть  $V = 1,25$  л жидкости с удельной теплоёмкостью  $c = 1000 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$  до температуры  $t$  в промежутке от  $80^\circ\text{C}$  до  $90^\circ\text{C}$ . Плотность жидкости  $\rho = 0,8 \text{ г/см}^3$ . Сможет ли Гаврила определить температуру нагретой жидкости с точностью до  $0,5^\circ\text{C}$ , если при лабораторной температуре  $t_0 = 20^\circ\text{C}$  он будет использовать термометр, теплоёмкость которого равна  $C = 10 \text{ Дж/кг}$ ?
6. Белый медведь вышел из точки  $A$ , прошёл 3 км на север, потом 3 км на восток, потом 3 км на юг и оказался снова в точке  $A$ . Другой белый медведь вышел из точки  $B$ , прошёл 5 км на север, потом 5 км на запад, потом 5 км на юг и оказался снова в точке  $B$ . Найдите максимально возможное расстояние между точками  $A$  и  $B$ , если допустить, что Земля имеет форму шара радиусом 6370 км и что описанные события произошли севернее экватора.

29 февраля 2020 г.

**оценок задач:**

Каждая задача оценивается в 20 баллов. Оценка 20 баллов ставится за правильное и полное решение задачи и правильный ответ.

За решение с различными недочетами (недостатки обоснования, неточности и т. д.) ставится 15 баллов. В некоторых задачах ставились также оценки 5 и 10 баллов за частичное продвижение в решении.

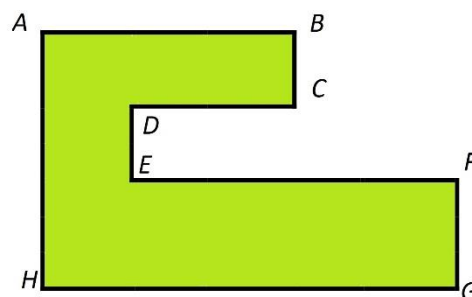
### Ответы и решения

1. Ответ: 29. Решение. Пусть мотоцикл проехал на  $M$  кругов больше, чем велосипедист, а автомобиль – на  $A$  кругов больше велосипедиста. Заметим при этом, что путь велосипедиста не обязан равняться целому числу кругов, но разности путей должны быть целыми.

Тогда мотоцикл обогнал велосипедиста  $(M-1)$  раз, автомобиль обогнал мотоциклиста  $(A-M-1)$  раз, автомобиль обогнал велосипедиста  $(A-1)$  раз. И всего обгонов будет  $M-1+A-M-1+A-1=2A-3$ . При этом по условию  $A-1=15$ , то есть  $A=16$ . Значит, всего обгонов будет  $2 \cdot 16 - 3 = 29$ .

2. Ответ: 4 минуты. Решение. Получается восьмиугольник, имеющий форму, показанную на рисунке.

По условию, время прохождения отрезка  $AH$  равно 8, время прохождения отрезка  $EF$  равно 5. Пусть искомое время прохождения отрезка  $AB$  равно  $x$ , время прохождения отрезка  $DC$  равно  $y$ . Тогда  $HG = 5 + x - y$ . Кроме того,  $BC + DE + FG = AH = 8$ .



Тогда периметр парка равен

$$AB + DC + EF + HG + AH + (BC + DE + FG).$$

Так как скорость движения Гаврилы постоянная, то после деления на скорость получается уравнение для соответствующих времен:

$$34 = x + y + 5 + (5 + x - y) + 8 + 8 \Leftrightarrow 34 = 2x + 26 \Leftrightarrow x = 4.$$

3. Ответ:  $405 \text{ кг/м}^3$  и  $607,5 \text{ кг/м}^3$ . Решение. Обозначим одинаковые массы частей через  $m$ , плотности через  $2\rho$  и  $3\rho$ . Тогда первая часть имеет объем  $\frac{m}{2\rho}$ , а вторая –  $\frac{m}{3\rho}$ . Значит, масса бруска рав-

$$\text{на } 2m, \text{ а объем равен } \frac{m}{2\rho} + \frac{m}{3\rho} = \frac{5m}{6\rho}.$$

Получаем уравнение  $\frac{2m \cdot 6\rho}{5m} = 486$ , откуда  $\rho = 486 \cdot \frac{5}{2 \cdot 6} = \frac{405}{2}$ .

Значит, плотности частей равны  $405 \text{ кг/м}^3$  и  $607,5 \text{ кг/м}^3$  соответственно.

4. Ответ: 3 : 2. Решение. Из второго закона Ньютона: 
$$\begin{cases} m_1 a_1 = m_1 g - F, \\ m_2 a_2 = m_2 g - F. \end{cases}$$

Так как  $a_1 = \frac{1}{2}g$ ,  $a_2 = \frac{1}{4}g$ , то 
$$\begin{cases} F = \frac{m_1 g}{2}, \\ F = \frac{3m_2 g}{4}, \end{cases} \text{ то есть } \frac{m_1}{m_2} = \frac{3}{2}.$$

5. Ответ: не сможет. Решение. Запишем уравнение баланса тепла:  $cV\rho(t - t_1) = C(t_1 - t_0)$ . Здесь  $t_1$  — температура жидкости, которая установится в жидкости, после опускания в нее термометра. Обозначим  $k = \frac{C}{cV\rho} = 0,01$  и выразим разность температур:

$$(t - t_1) = \frac{k(t - t_0)}{k + 1}, \text{ где } 80^\circ\text{C} \leq t \leq 90^\circ\text{C}.$$

Чем больше разность  $(t - t_0)$ , тем больше погрешность измерения. Максимальная ошибка составит

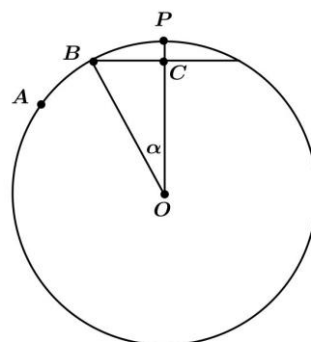
$$(t - t_1) = \frac{0,01(90 - 20)}{1,01} \approx 0,7^\circ\text{C}.$$

Поэтому делаем вывод о том, что измерить температуру с точностью до  $0,5^\circ\text{C}$  Гаврила не сможет.

6. Ответ:  $8 + \frac{4}{\pi} \approx 9,3 \text{ км}$ .

Решение. Возможная точка старта на Южном полюсе отвергается последним условием. Также невозможно стартовать на 3 км (или соответственно на 5 км) южнее Северного полюса, так как на полюсе движение на восток или запад невозможно.

Единственная возможность для первого медведя: стартовать чуть дальше, чем за 3 км до Северного полюса, затем совершить один или несколько полных кругов вокруг полюса суммарной длиной 3 км и вернуться в исходную точку. Если делается ровно  $n$  кругов, то  $n \cdot 2\pi r = 3$ , то есть радиус круга равен  $r = \frac{3}{2\pi n}$ . При этом (см. рисунок)  $BC = r$ ,  $AB = 3$ .



Получается  $\sin \alpha = \frac{r}{R}$ , где  $R$  – радиус Земли. Значит, расстояние от окружности до полюса  $BP$

равно  $R\alpha = R \cdot \arcsin\left(\frac{r}{R}\right)$ . Тогда расстояние от точки  $A$  до полюса равно  $3 + R \cdot \arcsin\left(\frac{3}{2\pi n R}\right)$ .

Аналогично точка старта второго медведя находится от Северного полюса на расстоянии

$5 + R \cdot \arcsin\left(\frac{5}{2\pi k R}\right)$  (где  $k$  – количество кругов).

Расстояние  $AB$  будем максимальным, если медведи приходят к полюсу с разных сторон и при этом  $n = k = 1$ . Тогда

$$AB = 3 + R \cdot \arcsin\left(\frac{3}{2\pi R}\right) + 5 + R \cdot \arcsin\left(\frac{5}{2\pi R}\right) = 8 + R \cdot \left( \arcsin\left(\frac{3}{2\pi R}\right) + \arcsin\left(\frac{5}{2\pi R}\right) \right).$$

Так как при малых  $\alpha$  имеет место равенство  $\sin \alpha \approx \alpha$ , то получаем приближенное значение

$$AB \approx 8 + R \cdot \left( \frac{3}{2\pi R} + \frac{5}{2\pi R} \right) \approx 8 + \frac{4}{\pi} \approx 9,3 \text{ км.}$$

Заметим, что здесь  $\sin \alpha$  имеет порядок  $\frac{2}{\pi R} < 10^{-4}$ . Поэтому данная оценка оказывается очень точ-

ной. Ошибка составляет гораздо менее миллиметра.

Для школьников 7-9 классов оценка точности не требуется.