Олимпиада «ЛОМОНОСОВ» по механике и математическому моделированию – 2019/2020

10 – 11 классы

Критерии оценок задач:

Каждая задача оценивается в 20 баллов. Оценка 20 баллов ставится за правильное и полное решение задачи и правильный ответ.

За решение с различными недочетами (недостатки обоснования, неточности и т. д.) ставится 15 баллов. В некоторых задачах ставились также оценки 5 и 10 баллов за частичное продвижение в решении.

Внимание! ***Итоговый балл участника равен сумме баллов за пять задач из шести, то есть худшая из шести оценок за задачи в сумму баллов не входит.***

Решения задач варианта 201. Ответы ко всем вариантам

1. Товарный поезд длиной 300 м движется со скоростью 72 км/ч в направлении нерегулируемого переезда. По перпендикулярному к железной дороге прямолинейному шоссе с постоянной скоростью V к переезду движется автомобиль. Когда головной вагон поезда находился на расстоянии 600 м от переезда, автомобилю до переезда оставалось проехать 700 м. А) При каких значениях V автомобиль не столкнется с поездом?

Б) Каково будет минимальное расстояние в метрах между автомобилем и ближайшей к нему точкой поезда, если автомобиль будет двигаться со скоростью 36 км/ч? Округлите ответ до ближайшего целого значения.

Решение. Рассмотрим задачу в системе координат, связанной с поездом. В ней поезд стоит, а автомобиль движется со скоростью $\sqrt{V^2+72^2}$ (км/ч), направленной под углом α к направлению шоссе, при этом $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{72}{V}$. Точка пересечения этой прямой с железной дорогой находится на расстоянии $0,7\cdot\dfrac{72}{V}=\dfrac{50,4}{V}$ км от переезда.

А. Столкновения не будет, если $\dfrac{50,4}{V}<0,6$ или $\dfrac{50,4}{V}>0,6+0,3$, то есть если $V>84$ км/ч или $V<56$ км/ч.

Б. При скорости $V=36$ км/ч получим $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{72}{36}=2$, и указанная точка пересечения находится на расстоянии $700\cdot 2=1400$ м от переезда, то есть позади поезда. Расстояние от хвостового вагона до этой прямой линии равно длине перпендикуляра, то есть равно $(1400-300-600)\cdot\cos\alpha=500\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}}=100\sqrt{5}\approx$ 224 м.

Один из способов получения последнего числа (возможны и другие): показать, что

$$223,5^2 = 49952,25 < \sqrt{50000} < 50176 = 224^2.$$

Ответ: А) $V > 84$ км/ч или $V < 56$ км/ч. Б) $100\sqrt{5} \approx$ 224 м.

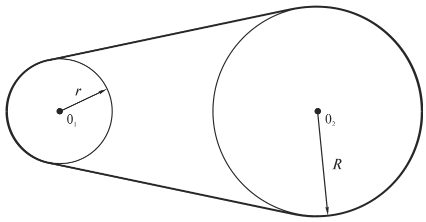
Округление до ближайшего целого можно проводить разными способами. Главное требование: оно должно быть основано на строгих оценках, а не на приближенных вычислениях без оценки точности.

Ответ к варианту 202: А) $V > 90$ км/ч или $V < 60$ км/ч. Б) $40\sqrt{5} \approx 89$ м.

Ответ к варианту 203: А) $V > 60$ км/ч или $V < 50$ км/ч. Б) $20\sqrt{5} \approx 45$ м.

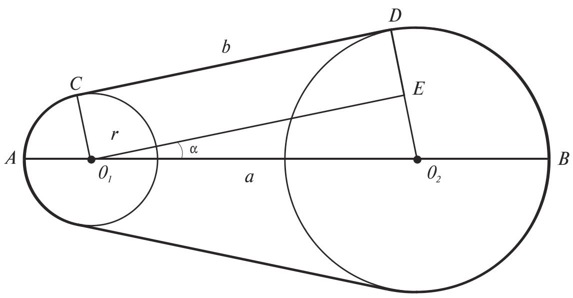
Ответ к варианту 204: А) $V > 105$ км/ч или $V < 60$ км/ч. Б) $40\sqrt{5} \approx 89$ м.

2. Два шкива с радиусами $r = 2$ см и $R = 10$ см должны быть соединены ременной передачей. Расстояние между осями вращения шкивов O_1 и O_2 равно 16 см.



Ремень для передачи имеет вид кольца и изготавливается путём сшивания концов длинного резинового шнура (считаем, что длина ремня равна длине этого шнура). Хватит ли для изготовления ремня резинового шнура длиной 75 см?

Решение. Ввиду симметрии половина длины ремня равна сумме длин двух дуг AC и DB и отрезка CD между точками касания. Отрезок CD равен $\sqrt{a^2 - (R-r)^2}$; дуга AC равна



$r\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; дуга BD равна $R\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$. Поэтому длина ремня равна

$$L = 2\sqrt{a^2 - (R-r)^2} + 2r\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 2R\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

$$= 2\sqrt{a^2 - (R-r)^2} + \pi(R+r) + 2\alpha(R-r),$$ где

$\sin\alpha = \frac{R-r}{a} = \frac{1}{2}$ (во всех вариантах). Поэтому $L = 2\sqrt{3}(R-r) + \pi\left(\frac{4}{3}R + \frac{2}{3}r\right)$

$= 2\sqrt{3}(10-2) + \pi\left(\frac{4}{3}\cdot 10 + \frac{2}{3}\cdot 2\right) = 16\sqrt{3} + \frac{44}{3}\pi$ [для информации: это $\approx 73,79$].

Так как $L = 16\sqrt{3} + \frac{44\pi}{3} < 16\cdot 1,8 + \frac{44\cdot 3,15}{3} = 75$, то шнура длиной 75 см хватит. Отметим, что при использовании для сравнения верхних (или нижних) оценок для π и $\sqrt{3}$ обоснование является строгим. Если же использовать приближения типа $\pi \approx 3,14$ (и даже $\pi \approx 3,14159$) или $\sqrt{3} \approx 1,73$, сравнение будет нестрогим из-за отсутствия оценки точности приближения.

Ответ: а) $16\sqrt{3}+\dfrac{44}{3}\pi$ см; б) хватит.

Ответ к варианту 202: $20\sqrt{3}+\dfrac{64}{3}\pi$ ($\approx 101{,}66$ см); б) не хватит.

Ответ к варианту 203: $22\sqrt{3}+\dfrac{68}{3}\pi$ ($\approx 109{,}31$ см); б) хватит.

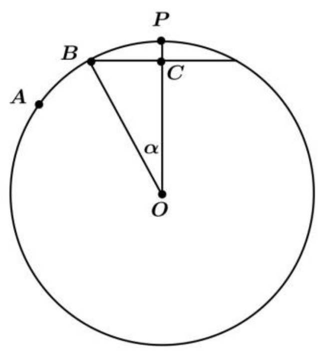
Ответ к варианту 204: $22\sqrt{3}+\dfrac{56}{3}\pi$ ($\approx 96{,}75$ см); б) не хватит.

3. Белый медведь вышел из точки А, прошел 3 км на север, потом 3 км на восток, потом 3 км на юг и оказался снова в точке А. Другой белый медведь вышел из точки Б, прошел 5 км на север, потом 5 км на запад, потом 5 км на юг и оказался снова в точке Б.

Найдите максимально возможное расстояние между точками А и Б, если допустить, что Земля имеет форму шара радиусом 6370 км и что описанные события произошли севернее экватора. Укажите как точное значение этого расстояния, так и его приближенное значение с точностью до 0,1 км.

Решение. Возможная точка старта на Южном полюсе отвергается последним условием. Также невозможно стартовать на 3 км (или соответственно на 5 км) южнее Северного полюса, так как на полюсе движение на восток или запад невозможно.

Единственная возможность для первого медведя: стартовать чуть дальше, чем за 3 км до Северного полюса, затем совершить один или несколько полных кругов вокруг полюса суммарной длиной 3 км и вернуться в исходную точку. Если делается ровно *n* кругов, то $n\cdot 2\pi r=3$, то есть радиус круга равен $r=\dfrac{3}{2\pi n}$. При этом (см. рисунок) $BC=r$, $AB=3$. Получается $\sin\alpha=\dfrac{r}{R}$, где R – радиус Земли. Значит, расстояние от окружности до полюса BP равно $R\alpha = R\cdot\arcsin\left(\dfrac{r}{R}\right)$. Тогда расстояние от точки A до полюса равно $3+R\cdot\arcsin\left(\dfrac{3}{2\pi nR}\right)$.



Аналогично точка старта второго медведя находится от Северного полюса на расстоянии $5+R\cdot\arcsin\left(\dfrac{5}{2\pi kR}\right)$ (где k – количество кругов).

Расстояние *АБ* будем максимальным, если медведи приходят к полюсу с разных сторон и при этом $n=k=1$. Тогда

$$АБ=3+R\cdot\arcsin\left(\frac{3}{2\pi R}\right)\ +5+R\cdot\arcsin\left(\frac{5}{2\pi R}\right)\ =8+R\cdot\left(\arcsin\left(\frac{3}{2\pi R}\right)+\arcsin\left(\frac{5}{2\pi R}\right)\right).$$

Так как при малых α имеет место равенство $\sin\alpha \approx \alpha$, то получаем приближенное значение

$$AБ \approx 8 + R\cdot\left(\frac{3}{2\pi R} + \frac{5}{2\pi R}\right) \approx 8 + \frac{4}{\pi} \approx 9{,}3 \text{ км.}$$

Заметим, что здесь $\sin\alpha$ имеет порядок $\frac{2}{\pi R} < 10^{-4}$. Поэтому данная оценка оказывается очень точной. Ошибка составляет гораздо менее миллиметра (для знатоков: второй член разложения в ряд имеет порядок куба аргумента, то есть 10^{-12}).

Ответ: $8 + 6370\cdot\left(\arcsin\left(\frac{3}{12740\pi}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{2548\pi}\right)\right) \approx 8 + \frac{4}{\pi} \approx$ 9,3 км.

Ответ к варианту 202: $5 + 6370\cdot\left(\arcsin\left(\frac{1}{6370\pi}\right) + \arcsin\left(\frac{3}{12740\pi}\right)\right) \approx 5 + \frac{5}{2\pi} \approx$ 5,8 км.

Ответ к варианту 203: $7 + 6370\cdot\left(\arcsin\left(\frac{1}{2548\pi}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{6370\pi}\right)\right) \approx 7 + \frac{7}{2\pi} \approx$ 8,1 км.

Ответ к варианту 204: $9 + 6370\cdot\left(\arcsin\left(\frac{1}{2548\pi}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{3185\pi}\right)\right) \approx 9 + \frac{9}{2\pi} \approx$ 10,4 км.

4. С одним молем идеального одноатомного газа осуществляется замкнутый цикл, в котором:

1-2 – процесс расширения газа с квадратичной зависимостью температуры от объема $T = \gamma V^2$,

2-3 – изохора, при этом температура уменьшается в n раз,

3-1 – изобара, при этом объем уменьшается в n раз.

Определите КПД цикла, если $n = 3$.

Решение. По условию задачи $T = \gamma V^2$. Тогда из закона Менделеева ‑ Клапейрона $PV = RT$ следует, что $P = \gamma RV$, то есть процесс 3-1 – это линейная функция в осях $P - V$. Исходя из закона М-К, легко получить, что в точке 2 и 3 температура будет равна $T_2 = 3T_0$, $T_3 = 9T_0$ соответственно. Перестроим график процесса в осях $P - V$ (см. рисунок).

Рассмотрим процесс 1-2. Найдем изменение внутренней энергии $\Delta U = \frac{3}{2}R\cdot 8T_0 = 12RT_0$ и работу

$A = \frac{1}{2}\cdot 4P_0\cdot 2V_0 = 4RT_0$. Тогда количество теплоты, переданное в систему, равно $Q_1 = 16RT_0$.

На участке 2-3 имеем $\Delta U = -\frac{3}{2}R\cdot 6T_0 = -9RT_0$, $A = 0$ и $Q_{23} = -9RT_0$.

На участке 3-1: $\Delta U = -\frac{3}{2}R\cdot 2T_0 = -3RT_0$, $A = -\frac{1}{2}\cdot 2P_0\cdot V_0 = -2RT_0$ и $Q_{31} = -5RT_0$.

Тогда общее количество теплоты, отданное системой, будет равно

$$Q_2 = |Q_{23}| + |Q_{31}| = 5RT_0 + 9RT_0 = 14RT_0.$$

Отсюда получаем кпд $\varepsilon = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{16-14}{16} = \frac{1}{8}$ = 0, 125. Общая формула для кпд $\varepsilon = \frac{n-1}{4(n+1)}$.

Ответ: 1/8.

Ответ к варианту 202: 1/20.

Ответ к варианту 203: 1/12.

Ответ к варианту 204: 3/28.

5. На плоскости *Oxy* красным цветом нарисована кривая $y = x^4 + 2020$. В этой же плоскости движется 2020 желтых частиц с номерами 1, 2, 3, …, 2019, 2020 соответственно. Траекторией движения частицы с номером *n* является кривая $y = 2n^2 - 71 - 61n + (n+92)x^2$. Если какая-то частица пересекает красную линию (или касается ее) только в таких точках, абсциссы которых являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии (содержащей не менее трех членов), то она перекрашивается в красный цвет. Укажите номера всех красных частиц.

Решение. Записав уравнение $x^4 + 2020 = 2n^2 - 71 - 61n + (n+92)x^2$, приходим к задаче: найти все такие значения параметра *n*, при каждом из которых уравнение $x^4 - (n+92)x^2$ $-(2n^2 - 61n - 2091) = 0$ имеет не менее трех различных корней, и все эти корни являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии.

Дискриминант квадратного уравнения $t^2 - (n+92)t - (2n^2 - 61n - 2091) = 0$ равен

$D = (n+92)^2 - 4(2n^2 - 61n - 2091) = (3n-10)^2$. Значит, это уравнение имеет корни:

$\frac{n+92 \pm (3n-10)}{2}$, то есть $t_1 = 2n + 41$; $t_2 = 51 - n$.

Если $D = 0$, то корень один, но тогда исходное уравнение имеет не более двух корней, что нас не устраивает. Если корней два, но хотя бы один из них отрицательный, то у исходного уравнения также будет не более двух корней, что нас не устраивает.

Если корней два, и один из них положительный, а второй равен 0, то исходное уравнение имеет 3 корня: $-\sqrt{t_1}$; 0; $\sqrt{t_1}$, что нас устраивает. Поэтому либо $\begin{cases} 51 - n > 0, \\ 2n + 41 = 0, \end{cases}$ (что невозможно при $n \geq 0$), либо $\begin{cases} 2n + 1 > 0, \\ 51 - n = 0, \end{cases}$ откуда $n = 51$.

При $n = 51$ получаются корни $t_1 = 143$, $t_2 = 0$, порождающие корни исходного уравнения $-\sqrt{143}$, 0 и $\sqrt{143}$.

Если оба корня положительны, то исходное уравнение имеет корни: $-\sqrt{t_1}$; $-\sqrt{t_2}$; $\sqrt{t_2}$; $\sqrt{t_1}$. Они будут последовательными членами прогрессии, если выполнены условия $\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}$ $=\sqrt{t_2}+\sqrt{t_2}=-\sqrt{t_2}+\sqrt{t_1}$. Отсюда $\sqrt{t_1}=3\sqrt{t_2}$, то есть $t_1=9t_2>0$.

Значит, либо $51-n=9(2n+41)$ (что невозможно при $n\geq 0$), либо $2n+41=9(51-n)$, откуда $n=38$. При этом получаются корни $t_1=117$, $t_2=13$, порождающие корни исходного уравнения $x=\pm 3\sqrt{13}$, $x=\pm\sqrt{13}$, являющиеся прогрессией с первым членом $-3\sqrt{13}$ и разностью $2\sqrt{13}$.

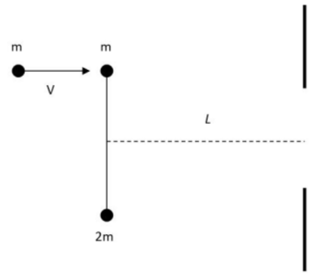
Ответ: 38 и 51.

Ответ к варианту 202: 41 и 54.

Ответ к варианту 203: 29 и 42.

Ответ к варианту 204: 47 и 60.

6. Гантель длины $2l$ с точечными массами *m* и 2*m* на концах лежит на гладком льду параллельно линии ворот (см. рисунок). Расстояние от гантели до линии ворот равно *L*, ширина ворот $d=\sqrt{3}\cdot l$. На точечную массу *m* налетает маленькая шайба такой же массы *m*, двигающаяся со скоростью *V* перпендикулярно гантели. Удар шайбы и точечной массы абсолютно неупругий. Вкатится ли гантель в ворота, не задев ни одной штанги? Трением между гантелью и льдом пренебречь. Стержень, соединяющий точечные массы, жесткий и невесомый.



Числовые данные: $l=1$ м, $m=100$ г, $V=10$ м/с.

Решение. Из закона сохранения импульса получается, что две точечные массы начнут совместно двигаться со скоростью *V*/2. Центр масс, расположенный посередине гантели, будет двигаться со скоростью *V*/4. При этом гантель начнет вращаться с угловой скоростью $\omega=\dfrac{V}{4l}$. Законы движения концов гантели (ось *x* направлена к воротам, ось *y* параллельно воротам):

$$x_1=\frac{Vt}{4}+l\cdot\sin\omega t \text{ и } y_1=l\cdot\cos\omega t \text{ – для верхнего (на рисунке) конца;}$$

$$x_2=\frac{Vt}{4}-l\cdot\sin\omega t \text{ и } y_2=-l\cdot\cos\omega t \text{ – для нижнего конца.}$$

Ответ на вопрос, ударится ли гантель о штангу или вкатится в ворота, зависит от расстояния до ворот *L*. Например, рассмотрим случай *L* = 2*l*.

Рассмотрим первый оборот гантели. Найдем момент времени, когда верхний конец гантели имеет ординату $y=\frac{d}{2}$. Тогда $y_1=l\cdot\cos\omega t=\frac{\sqrt{3}l}{2}\ \Rightarrow\ \omega t=\frac{\pi}{6}$, то есть $t=\frac{2\pi l}{3V}$. При этом $x_1=\frac{Vt}{4}+l\cdot\sin\omega t\ =\frac{\pi l}{6}+\frac{l}{2}<2l=L.$ Это означает, что гантель пока не долетела до ворот, и удара верхнего конца о штангу не произойдет.

Аналогично, если $y_2=-l\cdot\cos\omega t=\frac{\sqrt{3}l}{2}$, то $\omega t=\frac{5\pi}{6}$, $t=\frac{10\pi l}{3V}$. В этот момент $x_1=\frac{Vt}{4}+l\cdot\sin\omega t$ $=\frac{5\pi l}{6}+\frac{l}{2}>2l=L$ и $x_2=\frac{Vt}{4}-l\cdot\sin\omega t\ =\frac{5\pi l}{6}-\frac{l}{2}>2l=L$.

То есть, если расстояние равно $L = 2l$, то гантель при вращении не заденет стенку и вкатится в ворота. Для оценки выполнения приведенных выше неравенств необходимо использовать верхние и нижние границы для π.

Если же $L<\frac{\pi l}{6}+\frac{l}{2}\ =\frac{l(\pi+3)}{6}$, то верхний конец гантели уже на первом обороте не пройдет в ворота.

Если $\frac{\pi l}{6}+\frac{l}{2}<L<\frac{5\pi l}{6}-\frac{l}{2}$, то есть $\frac{l(\pi+3)}{6}<L<\frac{l(5\pi-3)}{6}$, то гантель пройдет через ворота, не задевая их.

Если $\frac{5\pi l}{6}-\frac{l}{2}=\frac{l(5\pi-3)}{6}<L<\frac{7\pi l}{6}+\frac{l}{2}=\frac{l(7\pi+3)}{6}$, то нижний конец гантели на первом обороте заденет за верхнюю (на рисунке) границу.

Далее процесс будет периодически повторяться.