Олимпиада «ЛОМОНОСОВ» по механике и математическому моделированию – 2020/2021

9 классы

Критерии оценок задач:

Каждая задача оценивается в **20 баллов**. Оценка 20 баллов ставится за правильное и полное решение задачи и правильный ответ.

За решение с различными недочетами (недостатки обоснования, неточности и т. д.) ставится 15 баллов. В некоторых задачах ставились также оценки 5 и 10 баллов за частичное продвижение в решении.

Решения задач варианта 2119.

Задача 1. Робот-пылесос запрограммирован так, что он движется по полу по закону:

$$\begin{cases} x=(t-6)^2, \\ y=0,\ 0\le t\le 7;\ y=(t-7)^2,\ t\ge 7, \end{cases}$$

где оси выбраны параллельно стенам. Время *t* измеряется в минутах, а координаты в метрах. Найдите пройденный роботом путь за первые 7 минут и модуль изменения вектора скорости за восьмую минуту.

Решение. Первые 7 минут точка движется с постоянным ускорением вдоль оси *x*. Скорость точки при $t\le 7$ равна $V_x=2(t-6)$ и обращается в ноль в момент времени $t_1=6$. Тогда пройденный путь будет равен $L=x(0)+x(7)=1+36=37$.

Вектор скорости $\bar{V}$ в каждый момент времени $t\ge 7$ определяется значениями своих проекций на оси координат: $V_x=2(t-6)$, $V_y=2(t-7)$. Изменение скорости $\Delta\bar{V}$ за восьмую минуту определим через изменение проекций скорости $\Delta\bar{V}=\bar{V}(8)-\bar{V}(7)=(4;2)-(2;0)=(2;2)$.

Модуль вектора $\Delta\bar{V}$ равен $2\sqrt{2}$.

Ответ: А) 37; Б) $2\sqrt{2}$.

Задача 2. Экспериментаторы Глафира и Гаврила разместили на белой плоской поверхности треугольник из тонкой проволоки со сторонами 30 мм, 40 мм, 50 мм. Эта проволока облеплена миллионами непонятных микроорганизмов. Ученые выяснили, что при подключении к проволоке электрического тока эти микроорганизмы начинают хаотичное движение на этой плоскости в разные стороны с примерной скоростью $\frac{1}{6}$ мм/сек. При этом вдоль траектории их движения плоскость окрашивается в красный цвет. Найдите площадь окрашенной поверхности через 1 минуту после подключения тока. Округлите ее до ближайшего целого числа квадратных миллиметров.

Решение. За минуту микроорганизм передвигается на 10 мм. Так как в прямоугольном треугольнике со сторонами 30, 40, 50 радиус вписанной окружности равен 10, то все точки внутри треугольника удалены от сторон треугольника на расстояние, не превышающее 10 мм. Значит, микроорганизмы заполнят всю внутренность треугольника.

При движении наружу будут достигаться точки, отстоящие от сторон треугольника на расстояние 10 мм, и точки, отстоящие от вершин на расстояние 10 мм.

В итоге суммарная занятая площадь есть: площадь треугольника + расположенные вне треугольника 3 полоски шириной 10 мм каждая с суммарной длиной, равной периметру треугольника + 3 круговых сектора радиуса 10, в сумме составляющие круг. Получаем:

$$\frac{30\cdot 40}{2}+10\cdot\left(30+40+50\right)+\pi\cdot 10^2 \;=600+1200+100\pi=1800+100\pi\approx 2114 \text{ мм}^2.$$

Ответ: $1800+100\pi\approx 2114$ мм^2.

Задача 3. Все ученики класса по результатам теста набрали разное количество баллов (целые положительные числа), совпадающих результатов нет. В сумме все они набрали 119 баллов. Сумма трех самых маленьких результатов – 23 балла, а трех самых больших – 49 баллов. Сколько учеников сдавали тест? Сколько баллов набрал победитель?

Решение. Обозначим все результаты в порядке возрастания $a_1, a_2, ..., a_n$, где n – количество учеников. Так как $a_1+a_2+a_3=23$, $a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=49$, то сумма чисел, стоящих между a_3 и a_{n-2} равна 119 – 23 – 49 = 47.

Так как $a_1+a_2+a_3=23$, то $a_3\ge 9$ (иначе $a_1+a_2+a_3\le 6+7+8<23$).

Так как $a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=49$, то $a_{n-2}\le 15$ (иначе $a_{n-2}+a_{n-1}+a_n\ge 16+17+18>49$).

Значит, между a_3 и a_{n-2} могут стоять только числа 10, 11, 12, 13, 14. Их сумма равна 60, а должна быть равна 47. Поэтому здесь есть все эти числа, кроме числа 13.

Получается последовательность a_1, a_2, 9, 10, 11, 12, 14, 15, a_{n-1}, a_n, в которой $a_1+a_2=14$, $a_{n-1}+a_n=34$. Значит, n = 10, $a_1=6$, $a_2=8$, $a_{n-1}=16$, $a_n=18$.

Ответ: А) 10 учеников; Б) 18 баллов.

Задача 4. Сноубордист Гаврила скатывался с горки высотой 250 метров и у подножья горы имел скорость 10 м/с. Какая доля всех потерь механической энергии за время спуска пошла на нагрев сноуборда массой 6 кг, если он нагрелся на 1 градус? Удельная теплоемкость материала сноуборда 300 Дж/кг · К. Вес Гаврилы в полном снаряжении 72 кг.

Решение. Закон изменения механической энергии при спуске $\frac{mV^2}{2}=mgH-W$. Отсюда потери энергии $W=mgH-\frac{mV^2}{2}=72\cdot 10\cdot 250-36\cdot 100=36\cdot 4900$ Дж.

Количество теплоты $Q=c\cdot m\cdot(T-T_0)=300\cdot 6\cdot 1=1800$.

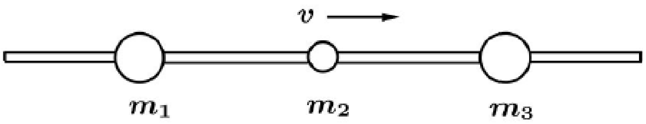
Искомая величина $k=\frac{Q}{W}=\frac{6\cdot 300}{36\cdot 4900}=\frac{1}{98}$.

Ответ: 1/98.

Задача 5. Три бусинки массами $m_1=150$ г, $m_3=30$ г, $m_2=1$ г (см. рисунок) могут скользить вдоль горизонтальной спицы без трения.

Определите максимальные скорости больших бусинок, если в начальный момент времени они покоились, а маленькая бусинка двигалась со скоростью $V=10$ м/с.

Удары считать абсолютно упругими.



Решение. После каждого соударения модуль скорости бусинки с массой m_2 уменьшается. После некоторого количества соударений ее скорость окажется недостаточной, чтобы догнать очередную бусинку m_1 или m_3. После такого последнего соударения скорости бусинок меняться не будут. Пусть V_1 и V_3 – модули скорости бусинок m_1 и m_3 соответственно, V_2 – проекция скорости бусинки m_2 на направление движения бусинки m_3 (после последнего соударения).

Согласно законам сохранения импульса и энергии получаем:

$$-m_1V_1+m_2V_2+m_3V_3=m_2V\,, \qquad (1)$$

$$\frac{m_1V_1^2}{2}+\frac{m_2V_2^2}{2}+\frac{m_3V_3^2}{2}=\frac{m_2V^2}{2}. \qquad (2)$$

Так как, согласно условию задачи $m_2\ll m_1$ и $m_2\ll m_3$, то левых частях уравнений (1) и (2) можно пренебречь членами, содержащими m_2.

Действительно, если, например, после последнего соударения бусинка m_2 движется в направлении бусинки m_1, то $|V_2|\le V_1$ и поэтому $\frac{m_2|V_2|}{m_1V_1}\ll 1$, $\frac{m_2V_2^2}{m_1V_1^2}\ll 1$. Аналогично рассматривается ситуация, когда бусинка m_2 движется после последнего соударения в направлении бусинки m_3.

Таким образом, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}-m_1V_1+m_3V_3=m_2V,\\ m_1V_1^2+m_3V_3^2=m_2V^2.\end{cases}$$

Обозначив $m_2=m$, тогда $m_3=nm$, $m_1=5nm$, где $n=30$, запишем систему в виде:

$$\begin{cases}-5nV_1+nV_3=V,\\ 5nV_1^2+nV_3^2=V^2.\end{cases}$$

Решая эту систему, находим

$$\frac{V_1}{V}=-\frac{1}{6n}+\sqrt{\frac{1}{30n}-\frac{5}{30^2n^2}}\approx-\frac{1}{6n}+\sqrt{\frac{1}{30n}}=-\frac{1}{180}+\frac{1}{30}=\frac{1}{36};$$

$$\frac{V_3}{V}=\frac{1}{6n}+\sqrt{\frac{30}{36n}-\frac{5}{36n^2}}\approx\frac{1}{6n}+\sqrt{\frac{30}{36n}}=\frac{1}{180}+\frac{1}{6}=\frac{31}{180}.$$

Ответ: $V_1\approx0,28$ м/с; $V_3\approx1,72$ м/с.