

№1 (20 баллов) Человек едет на одноколёсном велосипеде по кругу. При этом точка контакта колеса с опорой K перемещается вдоль окружности радиуса $R = 2$ м с постоянной линейной скоростью $V = 2$ м/с. Во время движения велосипедист наклонен точно в сторону центра круга. При этом отрезок $KC = 50$ см, соединяющий точку K с центром масс C человека, образует с горизонтальной плоскостью постоянный угол $\alpha = 60^\circ$. Найти скорость, с которой перемещается центр масс C человека.

Ответ и решение:

Время T , в течение которого велосипедист совершает один полный оборот по кругу, равно

$$T = \frac{2\pi R}{V}.$$

Радиус r окружности, вдоль которой движется центр масс C велосипедиста, равен

$$r = R - l \cos \alpha.$$

Длина этой окружности равна

$$2\pi r = 2\pi(R - l \cdot \cos \alpha).$$

Центр масс C совершает оборот по кругу в течение того же времени T , поэтому скорость v движения центра масс C равна

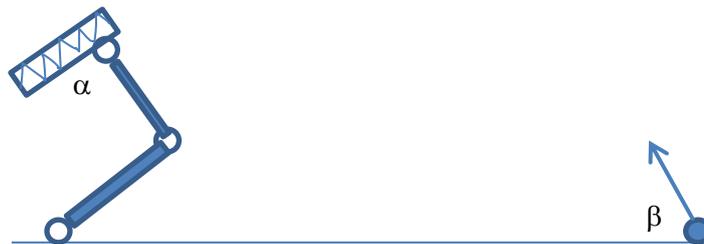
$$v = \frac{2\pi(R - l \cdot \cos \alpha)}{T} = \frac{V 2\pi(R - l \cdot \cos \alpha)}{2\pi R} = V \left(1 - \frac{l}{R} \cdot \cos \alpha \right).$$

$$v = 2 \times \left(1 - \frac{0,5}{2} \times \cos(60^\circ) \right) = 2 \times \left(1 - \frac{1}{8} \right) = 1,75 \text{ (м/с)}$$

Ответ: $v = 1,75$ м/с.

№2 (30 баллов) Робот ловит шарик, вылетающий из точки, расположенной на расстоянии $s = 2$ м на той же высоте, что и основание робота. Шарик вылетает со скоростью 5 м/с под углом 60° относительно горизонта.

Ловушка для шарика представляет собой трубу, в которую шарик залетит только если верхний конец ловушки окажется на траектории движения шарика, а направление движения в точности совпадает с направлением трубы. В какой точке относительно своего основания робот должен поместить верхнюю точку ловушки, если имеется требование, что она должна располагаться под углом 45° к горизонту? В ответе укажите координаты точки. Ускорение силы тяжести принять 10 м/с², сопротивлением воздуха пренебречь.



Ответ и решение:

Начальная скорость шарика

$$(V_x, V_y) = (V \cos \beta, V \sin \beta)$$

Текущая скорость

$$v_x = V_x, \quad v_y = V_y - gt$$

Текущая координата

$$x_t = s - V_x t, \quad y_t = V_y t - \frac{gt^2}{2}$$

Угол касательной к траектории

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{V_y - gt}{V_x}$$

Отсюда находится время встречи

$$t_1 = \frac{V_x \operatorname{tg} \alpha + V_y}{g}$$

Далее координаты, при заданных значениях углов

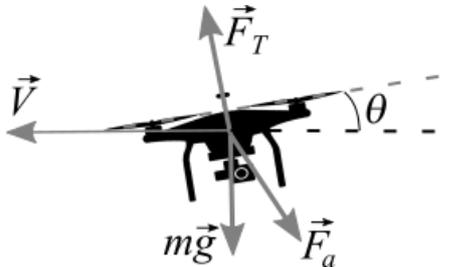
$$V_x = \frac{1}{2}V, \quad V_y = \frac{\sqrt{3}}{2}V, \quad t_1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \frac{V}{g}, \quad x_1 = s - \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \frac{V^2}{g}, \quad y_1 = \frac{V^2}{4g}$$

$$x_1 = 2 - \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \times \frac{25}{10} \approx 0,29 \text{ (м)}$$

$$y_1 = \frac{25}{4 \times 10} = 0,625 \text{ (м)}$$

Ответ $x_1 = 0,29 \text{ м}$, $y_1 = 0,625 \text{ м}$

№3 (30 баллов) Квадрокоптер массой $m = \sqrt{2}$ кг летит по горизонтали с постоянной скоростью $V = 5$ м/с. Его корпус наклонен к горизонту, так что угол между плоскостью, в которой расположены винты, составляет с горизонтом угол θ .



Суммарная сила тяги F_T , развиваемая винтами квадрокоптера, в каждый момент времени направлена перпендикулярно плоскости винтов. На квадрокоптер действует также сила сопротивления среды F_a , направленная против вектора скорости центра масс и равная cV^2 (где $c = 0,2$ кг/м – некоторый коэффициент, который мы для простоты будем считать постоянным).

Найти тягу, создаваемую винтами квадрокоптера при таком движении, а также угол θ . Ускорение силы тяжести принять 10 м/с².

Ответ и решение:

Спроектируем силы на горизонталь и вертикаль, учитывая, что движение равномерное и вращения нет:

$$\begin{aligned} 0 &= -F_a + F_T \sin \theta \\ 0 &= -mg + F_T \cos \theta \end{aligned}$$

Отсюда:

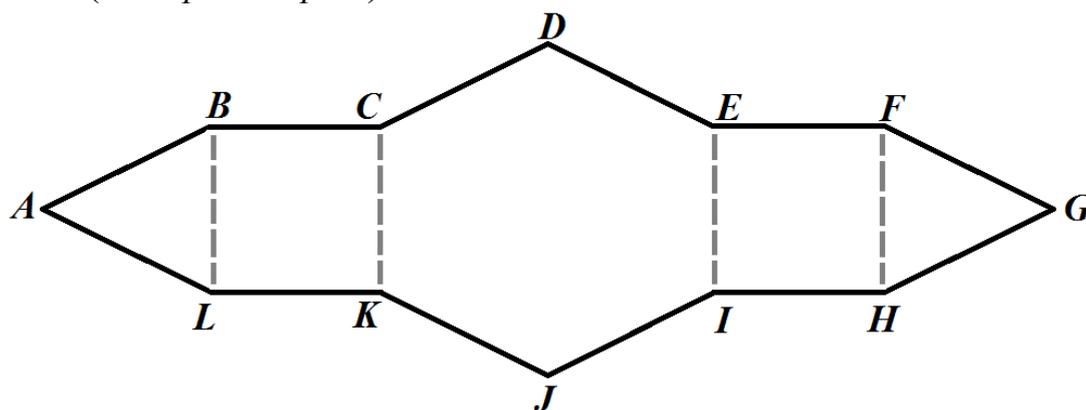
$$\begin{aligned} F_T &= \sqrt{c^2 V^4 + m^2 g^2} \\ \theta &= \arctg \frac{cV^2}{mg} \end{aligned}$$

Посчитаем

$$\begin{aligned} F_T &= \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 \times 5^4 + 2 \times 100} = \sqrt{25 + 200} = 15(\text{Н}) \\ \theta &= \arctg\left(\frac{0,2 \times 25}{\sqrt{2} \times 10}\right) = \arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \approx 19,47^\circ \end{aligned}$$

Ответ: $F_T = 15$ Н, $\theta \approx 19,47^\circ$

№4 (25 баллов) Робот движется по ровной горизонтальной поверхности по линии (см. траекторию).



Траектория

Траектория представляет собой многоугольник $ABCDEFGHIJKL$, составленный из отрезков двух равносторонних треугольников ABL и FHG , двух квадратов $BCKL$ и $EFHI$ и правильного шестиугольника $CDEIJK$.

Робот оснащён двумя отдельно управляемыми колёсами, расстояние между центрами колёс составляет 15 см, радиус колеса робота равен 5 см. Чтобы проехать прямолинейный участок AB каждое из колёс робота должно совершить 10 полных оборотов.

Все повороты робот должен совершать на месте, вращая колёса с одинаковой скоростью в противоположных направлениях. Робот не может ехать назад. При расчетах примите $\pi \approx 3$.

А) (10 баллов) Определите путь, который должен проехать робот, если по заданию всю траекторию нужно проехать 5 раз. Ответ дайте в метрах.

Б) (15 баллов) Определите, чему равен минимальный суммарный угол поворота робота, если робот проехал по многоугольнику $ABCDEFGHIJKL$ полностью один раз. Под суммарным углом поворота понимается сумма величин углов поворотов, при этом направление углов поворотов робота не учитывается. Ответ дайте в градусах.

Ответ и решение:

А) Сторона многоугольника равна:

$$AB = 2 \times \pi \times 5 \times 10 \approx 3 \times 100 = 300 \text{ (см)}$$

$$300 \text{ см} = 3 \text{ м}$$

Периметр многоугольника равен:

$$P = 3 \times 12 = 36 \text{ (м)}$$

Длина трассы равна:

$$L = 36 \times 5 = 180 \text{ (м)}$$

Ответ: 180 м

Б) Чтобы суммарный угол поворота был минимален, нужно стартовать из вершины угла, градусная мера которого наименьшая. Соответственно, нужно стартовать из вершин A или G .

Посчитаем величину угла правильного шестиугольника:

$$\frac{(6 - 2) \times 180^\circ}{6} = 120^\circ$$

Если поворот происходит в вершине угла, градусная мера которого меньше 180° , то величина угла поворота будет равна разности 180° и величины угла.

Если поворот происходит в вершине угла, градусная мера которого больше 180° , то величина угла поворота будет равна разности величины угла и 180° .

Суммарный угол поворота робота можно вычислить следующим образом:

$$30^\circ + 30^\circ + 60^\circ + 30^\circ + 30^\circ + 120^\circ + 30^\circ + 30^\circ + 60^\circ + 30^\circ + 30^\circ = 480^\circ$$

Ответ: 480°