

Олимпиада Ломоносов 2020-2021 учебный год
Робототехника. Заочный этап
8-9 класс

Задача 1. (10 баллов)

Робот едет по прямолинейной трассе. Первую половину времени он ехал со скоростью 3 см/с, а вторую – со скоростью в 2 см/с. Длина восьмой части трассы равна 7,5 дециметрам. Определите, за какое время робот проехал трассу полностью. Ответ дайте в минутах. В ответ запишите только число.

Ответ: 4

Решение:

Определим длину трассы:

$$7,5 \times 8 = 60 \text{ (дм)}$$

$$60 \text{ дм} = 600 \text{ см}$$

Составим уравнение движения, обозначив за x половину времени движения робота:

$$3x + 2x = 600$$

$$x = 120 \text{ (с)}$$

Посчитаем время движения робота в минутах:

$$120 \times 2 = 240 \text{ (с)}$$

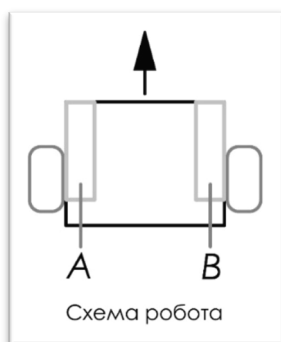
$$240 : 60 = 4 \text{ (мин.)}$$

Ответ: 4 минуты

Задача 2 (15 баллов)

Робот оснащён двумя отдельно управляемыми колёсами, радиусы колёс робота равны. Левым колесом управляет мотор А, правым колесом управляет мотор В. Колёса напрямую подсоединены к моторам. Расстояние между центрами колес робота равно 30 см. Длина обода колеса равна 5 см. В центре колесной базы робота закреплен маркер, которым робот может наносить изображение.

Робот чертит с помощью маркера окружность таким образом, что колесо А оказывается внутри окружности. Определите, за какое время робот начертит окружность полностью, если за 1 секунду ось мотора В поворачивается на 90 градусов. Мотор А выключен. При расчетах примите $\pi \approx 3$. Ответ дайте в секундах. В ответ запишите только число.



Ответ: 144

Решение:

Поскольку мотор А выключен, а мотор В включен, то робот будет колесом В описывать окружность вокруг колеса А. Радиус окружности, которую будет описывать робот колесом В будет равен 30 см.

Определим скорость вращения оси мотора В:

$$\frac{90^\circ}{360^\circ} \times 1 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{c} \right)$$

Определим время, за которое робот совершит колесом В один полный оборот вокруг колеса А:

$$\frac{2\pi \times 30 \text{ см}}{5 \text{ см} \times \frac{1}{4} \frac{1}{c}} = 2 \times 3 \times 6 \times 4 \text{ с} = 144 \text{ с}$$

Ответ: 144 с

Задача 3. (15 баллов)

Информационная панель робототехнического полигона содержит шестнадцать ярких светодиодов, каждый из которых можно включать и выключать отдельно. На панели находятся светодиоды трех цветов (см. *Схему расположения светодиодов*).

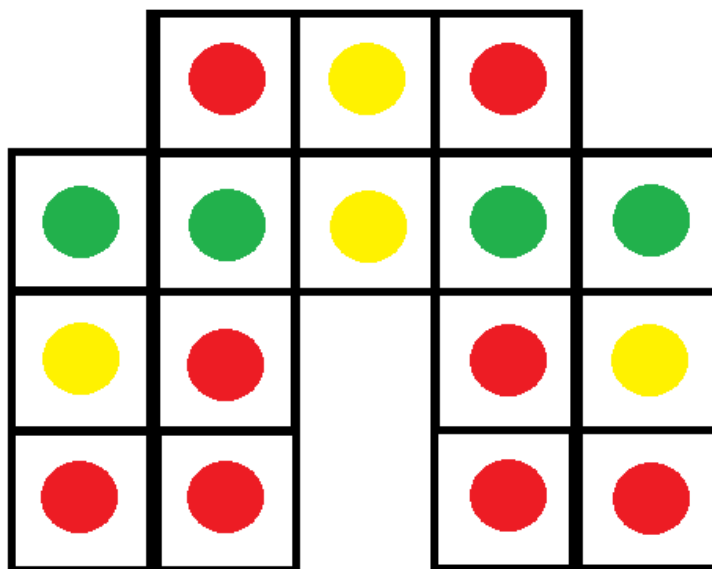


Схема расположения светодиодов

Данную панель решили использовать для жеребьевки. В начале соревнования все светодиоды были выключены. Затем на панели случайным образом зажгли один светодиод. Определите, сколько бит информации содержит сообщение, если на панели горит один зеленый светодиод. В ответ запишите только число.

Ответ: 2

Решение:

Найдем количество информации, содержащейся в сообщении, воспользовавшись вероятностным подходом.

Вероятность того, что загорится зеленый светодиод, будет равна:

$$P = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

Одному биту информации соответствует выбор, после которого неопределенность уменьшается в два раза.

Так как

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

то нам нужно сделать 2 таких выбора. Значит, сообщение содержит 2 бита.

Воспользовавшись формулой, можно получить аналогичный результат:

$$i = \log_2 \left(\frac{1}{p} \right) = \log_2 \left(\frac{1}{0,25} \right) = \log_2(4) = 2 \text{ бита}$$

Ответ: 2 бита

Задача 4. (20 баллов)

Работая над ремонтом крыши сарая, Саша решила использовать для подъема тяжестей следующую систему блоков – полиспаст (См. *Схему полиспаста*).

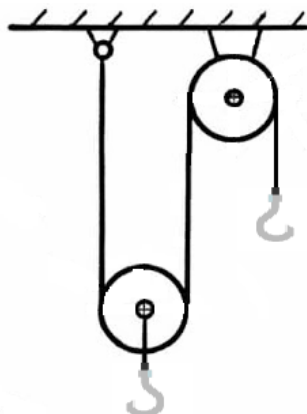


Схема полиспаста

Саше нужно поднять груз массой 1 ц. На крыше оказалась упаковка грунтовок, масса которой чуть больше 10 кг. Саша решила использовать ее в качестве противовеса, чтобы поднять объект большей массы, которым можно будет воспользоваться в качестве противовеса при следующем применении полиспаста и так далее.

В сарае Саша нашла следующие предметы, которые можно использовать в качестве противовесов:

№	Название	Масса (кг)
1	Грунтовка морозостойкая	10
2	Клей для керамогранита. Эконом упаковка	50
3	Клей для плитки высокоэластичный	25
4	Пескобетон М-300	40
5	Пол наливной универсальный	20
6	Сухая смесь М-200 монтажно-кладочная 2 в 1	80
7	Шпатлевка финишная полимерная	20
8	Штукатурка гипсовая универсальная серая	30

Наибольшая масса, которую Саша может перенести на крышу вручную, равна 8 кг. После использования полиспаста грузы можно отцепить от него. К любому из крюков одновременно можно прикрепить только один груз.

Массой блоков и силой трения в осях блоков можно пренебречь.

Какое минимальное количество раз Саше нужно будет воспользоваться полиспастом, чтобы поднять на крышу груз массой 1 ц? В ответе укажите только число.

Ответ: 4

Решение:

Нам нужно поднять груз массой 1 ц или 100 кг.

Использование подвижного блока позволяет уменьшить силу, необходимую для перемещения подвешенного к нему груза в 2 раза.

Значит, используя груз в 10 кг в качестве противовеса, можно поднять на крышу груз в 20 кг. Чтобы груз поднялся, противовес можно подтолкнуть. Поскольку нет трения в блоках, то грузы будут двигаться – противовес опускаться, а груз подниматься.

Подняв груз в 20 кг, используем его в качестве противовеса, чтобы поднять груз в 40 кг.

Подняв груз в 40 кг, используем его в качестве противовеса, чтобы поднять груз в 80 кг.

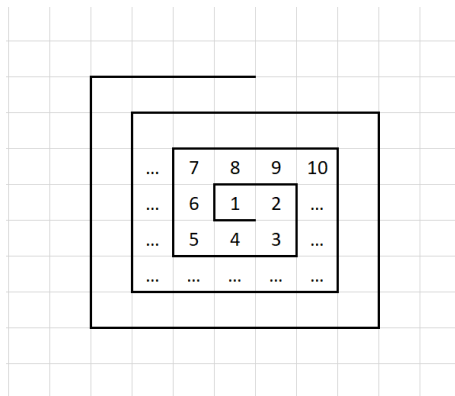
Подняв груз в 80 кг, используем его в качестве противовеса, чтобы поднять наш груз в 100 кг.

Таким образом, Саше нужно 4 раза воспользоваться полиспастом.

Ответ: 4 раза.

Задача 5. (20 баллов)

Робот-пылесос убирает клетчатый пол, двигаясь по спирали. За единицу времени робот убирает одну клетку и перемещается на следующую клетку. Таким образом, робот убирает все помещение. Часть спирали, по которой движется робот, изображена на рисунке:



На каких вертикальной и горизонтальной линиях относительно центра будет располагаться робот через 600 единиц времени, если считать, что 1 стоит на пересечении первой вертикальной и первой горизонтальной линии, а 7 на пересечении второй горизонтальной линии выше центра и на второй вертикальной линии левее центра.

В ответе укажите число – порядок линии относительно центра, а также выше или ниже относительно центра для горизонтальной линии, и правее или левее центра для вертикальной линии.

Ответ: 13 выше и 13 левее

Решение:

Через 600 единиц времени робот окажется на клетке с номером 601. Покажем это.

Так как за единицу времени робот убирает одну клетку и перемещается на следующую клетку, то через 1 единицу времени после старта робот уберет клетку с номером 1 и передвинется в клетку с номером 2. Еще через 1 единицу времени робот уберет клетку с номером 2 и передвинется в клетку с номером 3. Таким образом, количество целых единиц времени, которое робот потратил на уборку, будет всегда на 1 отличаться от номера клетки, в которой окажется робот на конец очередной единицы времени уборки.

Определим положение на спирали клетки с номером 601.

Рассмотрим принцип, по которому размещаются на спирали номера клеток.

Спираль раскручивается справа налево. За один виток спирали робот перемещается на удвоенную сумму двух последовательных натуральных чисел.

Определим, на какой клетке окажется робот после очередного витка

Робот стартует с клетки под номером 1.

На первом витке: $1 + (1 + 1 + 2 + 2) = 1 + 2 \times (1 + 2) = 1 + 6 = 7$

На втором витке: $7 + (3 + 3 + 4 + 4) = 1 + 2 \times (1 + 2 + 3 + 4) = 1 + 20 = 21$

На третьем витке: $21 + (5 + 5 + 6 + 6) = 1 + 2 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 43$

На n-ом витке: $1 + 2 \times \sum_{i=1}^{2n} i$

Сумму арифметической прогрессии можно вычислить по формуле:

$$S_i = \frac{a_1 + a_i}{2} \times i = \frac{a_1 + a_1 + d(i-1)}{2} \times i = \frac{2a_1 + d(i-1)}{2} \times i$$

Подставим в формулу наши значения:

$$a_1 = 1, d = 1, i = 2n$$

$$S_{2n} = \frac{2 \times 1 + 1 \times (2n - 1)}{2} \times 2n = n(2 + 2n - 1) = n(2n + 1)$$

Таким образом, на n-ом витке:

$$2n(2n + 1) + 1$$

Посчитаем, на какой клетке робот окажется после очередного витка:

При n = 4: $2 \times 4 \times (2 \times 4 + 1) + 1 = 8 \times 9 + 1 = 73$

При n = 5: $2 \times 5 \times (2 \times 5 + 1) + 1 = 10 \times 11 + 1 = 111$

При n = 6: $2 \times 6 \times (2 \times 6 + 1) + 1 = 12 \times 13 + 1 = 157$

При n = 7: $14 \times 15 + 1 = 211$

При n = 8: $16 \times 17 + 1 = 273$

При n = 8: $16 \times 17 + 1 = 273$

При n = 9: $18 \times 19 + 1 = 343$

При n = 10: $20 \times 21 + 1 = 421$

При n = 11: $22 \times 23 + 1 = 507$

При n = 12: $24 \times 25 + 1 = 601$

Получается, что по окончании 12 витка робот окажется ровно в 601 клетке

Тот же результат можно было получить и вторым способом.

Робот находится на 601 клетке. Определим, на каком по номеру витке он находится:

$$601 = 1 + 2 \times \sum_{i=1}^{2n} i$$

$$600 = 2 \times \sum_{i=1}^{2n} i$$

$$\sum_{i=1}^{2n} i = 300$$

Сумму арифметической прогрессии можно вычислить по формуле:

$$S_i = \frac{a_1 + a_i}{2} \times i = \frac{a_1 + a_1 + d(i-1)}{2} \times i = \frac{2a_1 + d(i-1)}{2} \times i$$

Подставим в формулу наши значения:

$$a_1 = 1, d = 1, i = 2n$$

$$S_{2n} = \frac{2 \times 1 + 1 \times (2n - 1)}{2} \times 2n = n(2 + 2n - 1) = n(2n + 1)$$

Составим уравнение относительно n:

$$n(2n + 1) = 300$$

$$2n^2 + n - 300 = 0$$

$$D = 1 + 4 \times 2 \times 300 = 2401$$

$$n_1 = \frac{-1 - 49}{4} = -12,5 - \text{не подходит по условию}(n - \text{натуральное})$$

$$n_2 = \frac{-1 + 49}{4} = 12$$

По окончании 12 витка робот окажется в клетке, которая находится на диагонали, которая проходит через левый верхний угол и центр спирали.

Робот окажется выше и левее клетки старта.

По окончании первого витка робот оказался на пересечении 2 горизонтальной и 2 вертикальной линии. По окончании 2 витка робот оказался на пересечении 3 горизонтальной и 3 вертикальной линии. Таким образом, после каждого витка робот передвигается на 1 линию «выше центра» и на 1 линию «левее центра».

Таким образом, после 12 витка робот окажется на пересечении 13 вертикальной и 13 горизонтальной линии.

Ответ:

13 выше центра

13 левее центра