# ПРАВИЛА ПРОВЕДЕНИЯ ОЧНОГО ТУРА УНИВЕРСИАДЫ "ЛОМОНОСОВ. КОСМИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ"

Финальный тур универсиады проходит 25–27 апреля. Начало дистанционной письменной работы: 25 апреля в 10:00 по московскому времени. Продолжительность работы 180 минут плюс 20 минут на фотографирование/сканирование работы и отправку ее на портал универсиады. Начало устного опроса — 26 апреля в 10:00 согласно предварительному расписанию. Вся оперативная инофрмация (технические баллы, расписание, ссылки на конференции и т.д.) — на странице мероприятия https://olymp.msu.ru/rus/event/6141/

Победителям и призерам предоставляются льготы при поступлении в 2020 году в магистратуру факультета космических исследований и магистратуру механико–математического факультета МГУ по соответствующему направлению, согласно правилам приема.

Подробную информацию можно получить в приемной комиссии факультетов или на сайтах.

## Задачи финального этапа

**Задача 1.** *Вычислите*

$$\lim_{n\to\infty} \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+an}\right), \quad \text{где } n\in\mathbb{N}.$$

*Число* $a\in\{1,\ldots,10\}$ *— варьируемый параметр.*

*Ответ.* 0 при четных $a$ и 1 при нечетных.

**Задача 2.** *При каких значениях параметра* $a$ *собственные векторы матрицы*

$$\begin{pmatrix} -6 & -3 & 5 \\ -3 & -1.5 & 2.5 \\ 5 & a & 2.5 \end{pmatrix}$$

*попарно ортогональны друг другу?*

*Ответ.* $a=2.5$

**Задача 3.** *На плоскости* $Oxy$ *провели прямую* $\ell$ *с уравнением* $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ *так, что* $\ell$ *проходит через точку* $M(p,p+1)$ *и образует, пересекаясь с координатными осями* $Ox$ *и* $Oy$*, треугольник площади* $1/2$*. В ответе укажите числа* $a$ *и* $b$ *(рассмотрите все возможные случаи). Число* $p\in\{1,\ldots,10\}$ *— варьируемый параметр.*

*Ответ.* $a=-1$, $b=1$ и $a=p/(p+1)$, $b=-(p+1)/p$.

**Задача 4.** *Псевдорешением линейной системы уравнений* $Ax=b$ *называется вектор* $x$*, для которого величина* $|Ax-b|$ *(длина вектора* $Ax-b$*) минимальна. Найдите псевдорешение системы*

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 &= a, \\ x_1+2x_2-x_3 &= b, \\ x_3 &= 1, \\ x_2+x_3 &= -1, \\ -x_1-x_2 &= c. \end{cases}$$

$a$, $b$, $c\in\{-2,-1,0,1,2\}$ *— варьируемые параметры.*

*Ответ.* $x_1=0{,}6a-0{,}2b-0{,}6c+0{,}8$, $x_2=-0{,}2a+0{,}4b+0{,}2c-0{,}6$, $x_3=0{,}25a-0{,}25b$.

**Задача 5.** *В пространстве* $L_2[-1,1]$ *найдите расстояние от функции* $\sin(\pi kx)$ *до подпространства многочленов степени не выше 2. Варьируемый параметр* $k\in\{1,\,2,\,3,\,4\}$*.*

*Ответ.* $\sqrt{1-\frac{6}{\pi^2k^2}}$.

**Задача 6.** *Две вершины треугольника имеют координаты* $(a,0)$ *и* $(-a,0)$*, а третья вершина скользит по параболе* $f(x)=x^2-bx+15$*. Какую кривую описывает при этом центр тяжести треугольника? Варьируемые параметры* $a\in\{1,\,2,\,3\}$*,* $b\in\{4,\,5,\,6\}$*.*

*Ответ.* Параболу $y=3x^2-bx+5$.

**Задача 7.** *Найдите числовую последовательность* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$*, удовлетворяющую рекуррентному соотношению* $a_n=3a_{n-1}+a_{n-2}-3a_{n-3}+4$*, если* $a_1=2$*,* $a_2=9$*,* $a_3=24$*.*

*Ответ.* $a_n=1+(-1)^n+3^n-n$

**Задача 8.** *В множестве из 2020 элементов выбраны несколько (три или более) различных подмножеств* $A_1,\ldots,A_n$ *так, что в любом пересечении* $A_i\cap A_j$*,* $i\neq j$*, лежит ровно один элемент, но при этом, пересечение любой тройки подмножеств* $A_i\cap A_j\cap A_k$*,* $i\neq j$*,* $i\neq k$*,* $j\neq k$*, пусто. Каким может быть число* $n$ *этих подмножеств?*

*Ответ.* $3\leq n\leq 64$