КОСМОНАВТИКА. КЛАССЫ 10-11.
УСЛОВИЯ, РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ

1. Дана функция $f(x) = ax + b + \frac{c}{x}$ с ненулевыми a и c. Известно, что ее график имеет точки в первой, второй и третьей координатных четвертях (и только в них).

а) Найдите знаки коэффициентов a, b, c.

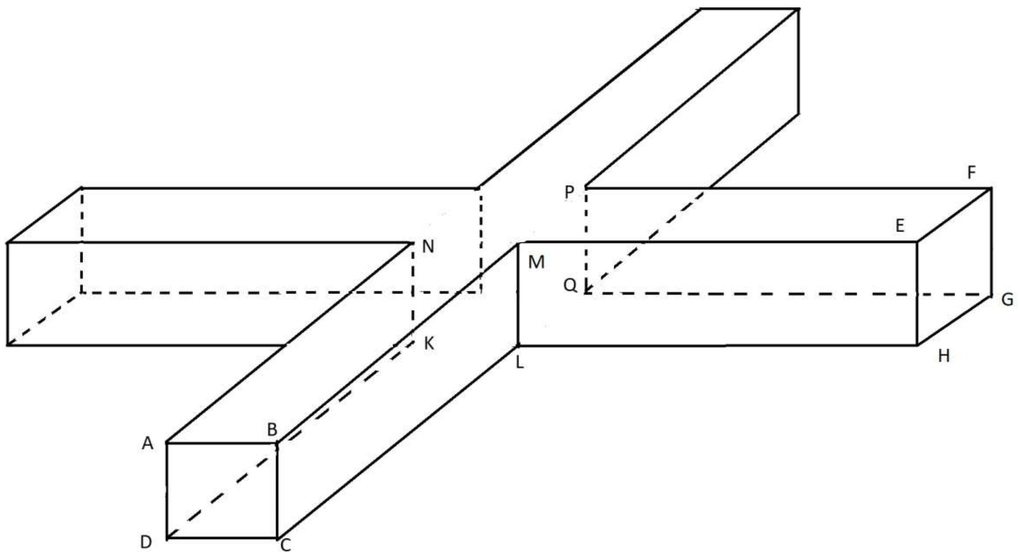
б) Пусть известно дополнительно, что $f(-1) = 2f(-2)$. Найдите сумму корней уравнения $f(x) = 0$.

Решение. а) Из условия следует, что график функции не имеет точек в четвертой четверти. Значит, $a > 0$. Действительно, если бы число a было отрицательным, то при подстановке очень большого положительного x значение функции было бы отрицательным. Аналогично $c > 0$, поскольку иначе при подстановке очень малого по модулю положительного x получили бы отрицательное значение функции. Осталось выяснить знак коэффициента b. Если $b \leq 0$, то при $x < 0$ получаем $f(x) < 0$. Но тогда график функции не будет иметь точек во второй четверти, что противоречит условию. Следовательно, $b > 0$.

б) Уравнение $f(x) = 0$ равносильно уравнению $ax^2 + bx + c = 0$ (поскольку $c \neq 0$, то $x = 0$ не может быть корнем). Это уравнение задает параболу, ветви которой направлены вверх (поскольку $a > 0$). Если эта парабола не пересекает ось абсцисс, то $ax^2 + bx + c \geq 0$ при всех x, а тогда $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x} \leq 0$ при любом отрицательном значении x, что неверно (график должен иметь точки во второй четверти). Значит, уравнение $f(x) = 0$ имеет два вещественных корня. По теореме Виета их сумма равна $-b/a$. Из условия $f(-1) = 2f(-2)$ получаем $b = 3a$, то есть сумма корней равна -3.

Ответ: а) $a > 0, b > 0, c > 0$; б) -3.

2. Космическая станция составлена из центрального куба и четырех одинаковых прямоугольных параллелепипедов (см. рисунок), длина которых в $k = 4$ раза больше двух других размеров:



$$AN = DK = BM = CL = PF = QG = ME = LH = 4AB = 4BC = 4EF = 4FG.$$

Космонавту, вышедшему в открытый космос, необходимо добраться из точки A в точку G по поверхности станции. Проложите кратчайший маршрут.

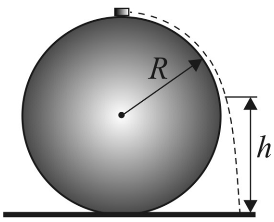
Решение. По пути из A в G космонавт должен пересечь одну из сторон квадрата $MPQL$. Очевидно, что проходить через сторону PQ ему не выгодно, это лишь удлинит путь. Разберем ситуацию, в которой он пересечет отрезок MP (ситуация с LQ разбирается полностью аналогично). Заметим, что кратчайший путь должен пройти через точку M . Для этого рассмотрим развертку граней $PFGQ$ и $EFGH$ на верхнюю плоскость (разрезы проводятся по ребрам FG, PQ, QG, EH, HG). Кратчайшая ломаная, пересекающая отрезок MP, пройдет через точку M. (Аналогично, при разборе ситуации с отрезком LQ получим, что кратчайший путь пройдет через точку L.) Таким образом, в любом случае космонавт пересечет отрезок ML. Обозначим середину этого отрезка через S. Предположим, что космонавт пересекает отрезок MS (ситуация с отрезком LS разбирается аналогично).

Итак, путь проходит через некоторую точку X отрезка MS . Очевидно, что кратчайший путь из A в X пересекает ребро BM. Очевидно также, что кратчайший путь из X в G пересекает либо ребро LH, либо ребро EH. Обозначим $ML = a,\ SX = x$. Развернем грани $QLHG$ и $EFGH$ на плоскость грани $MEHL$. Тогда длина первого пути (через ребро LH) равна $\sqrt{\left(\frac{3a}{2}+x\right)^2+16a^2}$, длина второго (через ребро EH) равна $\sqrt{\left(\frac{a}{2}+x\right)^2+25a^2}$, следовательно, первый путь короче.

Покажем, что путь будет кратчайшим в ситуации, когда $X = S$. Действительно, траектория космонавта $AX \to XG$. Но отрезок $XG = YA$, где точка $Y \in SL$ симметрична точке X относительно S. Теперь осталось заметить, что $AX + AY \geq 2AS$, причем равенство достигается при $X = Y = S$ (полусумма длин двух сторон треугольника больше длины медианы, проведенной к третьей стороне – легко проверяется достроением до параллелограмма). Точки пересечения траектории с ребрами BM и LH находятся из подобия треугольников.

Ответ: траектория $A \to T \to S \to U \to G$, где $T \in BM, MT{:}TB = 1{:}2, S \in ML, MS = LS$,

$U \in LH, LU{:}UH = 1{:}2$



3. На планете, лишенной атмосферы, космонавты провели следующий опыт. Небольшой грузик массой $\mathrm{m} = 10$ г они положили на вершину закрепленного шара радиуса $\mathrm{R} = 0{,}6$ м, обильно смазанного жидкой смазкой. После незначительного толчка грузик начал скользить по поверхности шара и оторвался от нее на высоте $\mathrm{h} = 0{,}6$ м, отсчитываемой от нижней точки шара. Найдите количество теплоты Q, которое выделилось за время скольжения грузика. Считайте, что поверхностное натяжение смазки не препятствует отрыву грузика от поверхности шара. Ускорение свободного падения примите равным $\mathrm{g} = 10\ \mathrm{м/с^2}$.

Решение. Грузик движется по поверхности шара под действием сил, модули и направления которых указаны на рисунке, где mg – модуль силы тяжести, $F_{\text{тр}}$ – модуль силы вязкого трения, N – модуль нормальной составляющей реакции шара. Согласно второму закону Ньютона, $m\frac{v^2}{R} = mg\cos\vartheta - N$, причем в момент отрыва $N = 0$. По закону изменения механической энергии $mg2R = \left(mgR + mgR\cos\vartheta + \frac{mv^2}{2}\right) + Q$. Отсюда находим, что $\cos\vartheta = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{Q}{mgR}\right)$ и $h = R\cos\vartheta + R = \frac{5}{3}R - \frac{2}{3}\frac{Q}{mg}$.

Ответ: $Q = mg\left(\frac{5}{2}R - \frac{3}{2}h\right) = 0{,}06$ Дж.

4. На планете Блук профессор Селезнев хотел пополнить коллекцию зоопарка. Туземцы продавали говорунов на ярмарке за A пиастров, а пегасов – за B пиастров. Профессор хочет потратить как можно больше денег, но не более C пиастров, купив как можно больше образцов фауны. То есть, сначала из всех наборов животных, которые профессор может купить на имеющиеся деньги, он выбирает один или несколько наборов с наибольшей стоимостью. Затем из этих наборов профессор выбирает набор с наибольшим числом животных. Помогите ему вычислить стоимость такой покупки.

Входные данные

Вводятся три целых числа A, B, C ($1 \leq A < B \leq 100$, $0 \leq C \leq 1000$).

Выходные данные

Выведите два числа – число говорунов и число пегасов, которых купит профессор.

Примеры

входные данные

2 3 11

выходные данные

4 1

Комментарий: потратив ровно 11 пиастров, можно купить 4 говоруна и 1 пегаса или 1 говоруна и 3 пегасов, но в первом варианте животных больше – его и выбирает профессор.

входные данные

3 5 10

выходные данные

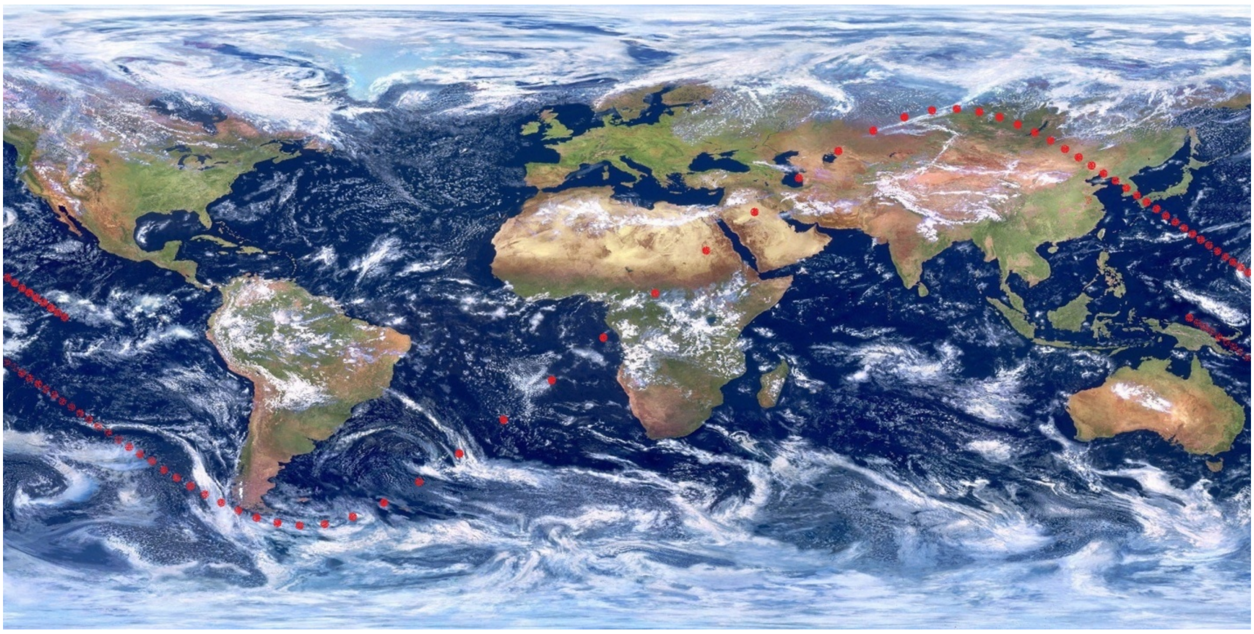
0 2

Решение. Одно из возможных решений на языке Python:

```
A=int(input())
B=int(input())
C=int(input())
cost=0
cost1=0
g1=C
p1=0
g=0
p=0
if cost<=C:
    while p1<=C/A:
        while g1>=0:
            cost1=p1*B+g1*A
            if (cost1<=C):
                if (cost1>cost):
                    cost=cost1
                    p=p1
                    g=g1
                elif (cost1==cost)and(p1+g1>p+g):
                    p=p1
                    g=g1
            g1-=1
        p1+=1
        g1=C
    print(g,p)
else:
    print(0,0)
```

5. Искусственный спутник сделал один виток по своей орбите. Через равные промежутки времени он передавал свои координаты: широту x (в градусах, отрицательная широта соответствует южному полушарию) и долготу y (в градусах по Гринвичу, отрицательная долгота соответствует западному полушарию).

Номер данного	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	
Долгота	162	164	166	168	171	173	175	177	179	-179	-177	-175	-172	-170	-168	-165	-163	
Широта	0	-1	-3	-4	-6	-7	-9	-10	-11	-13	-14	-16	-18	-19	-21	-22	-24	
Номер данного	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	
Долгота	-160	-158	-155	-152	-150	-147	-144	-141	-137	-134	-130	-126	-122	-117	-112	-107	-101	
Широта	-26	-28	-29	-31	-33	-35	-37	-39	-42	-44	-46	-49	-51	-53	-56	-58	-59	
Номер данного	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	
Долгота	-95	-87	-79	-70	-60	-48	-36	-22	-7	8	23	37	49	61	71	80	88	
Широта	-60	-59	-57	-53	-47	-39	-30	-18	-6	7	19	30	40	48	54	58	60	
Номер данного	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	
Долгота	95	102	107	113	118	122	126	130	134	137	141	144	147	150	153	155	158	
Широта	60	59	58	56	53	51	48	46	44	41	39	37	35	33	31	29	27	
Номер данного	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86
Долгота	161	163	166	168	170	172	175	177	179	-179	-176	-175	-172	-170	-168	-166	-164	-162
Широта	26	24	22	21	19	17	16	14	13	11	10	8	7	6	4	3	1	0



Иными словами, в момент передачи каждого данного, наблюдатель, находящийся на поверхности Земли в точке с широтой x и долготой y, видел спутник точно в зените. Эти данные нанесены на карту Земли (в плоской прямоугольной проекции, см. рисунок). Вычислите

а) Наклонение орбиты к плоскости экватора;

б) Длину большой полуоси эллипса орбиты;

в) Высоту спутника над поверхностью Земли в перигее и в апогее орбиты.

Решение. а) Простое замечание из стереометрии: если две плоскости пересекаются, в одной из плоскостей дана прямая l, и найден угол между этой прямой и второй плоскостью, то величина угла не превосходит величины угла между плоскостями (и достигает ее, когда прямая l перпендикулярна прямой пересечения плоскостей). Плоскость кеплеровской орбиты проходит через центр Земли, а радиус-вектор спутника с началом в центре Земли делает за один виток полный оборот. Угол между этим радиус-вектором и плоскостью экватора – это широта точки, в которой радиус-вектор пересекает поверхность Земли. Таким образом, наклонение орбиты совпадает с максимальной широтой спутника в течение витка. Ответ: 60°.

Решение. б), в) Разберемся в том, как спутники Земли движутся относительно ее поверхности, точнее, как меняется долгота проекции спутника на поверхность Земли. Если спутник вращается по низкой орбите (ниже геостационарной), то он делает один виток быстрее, чем за сутки. Возможны два варианта – спутник движется по направлению вращения Земли или против. В первом случае долгота проекции в течении витка монотонно увеличивается и меняется менее чем на 360° (так как Земля за время оборота спутника тоже поворачивается на некоторый угол). Видим, что эта ситуация не соответствует условию задачи – у нас долгота проекции за один виток изменилась более, чем на 360°. Во втором варианте долгота проекции монотонно убывает и меняется более чем на 360°. Это нам подходит (в условии задачи не сказано, что нумерация данных в таблице соответствует возрастанию времени; оказывается, данные надо читать по убыванию номеров). Рассмотрим теперь случай, когда спутник движется выше геостационарной орбиты. При движении по направлению вращения Земли спутник теперь «отстает» от вращения Земли, и его долгота монотонно убывает. Изменение долготы за один виток спутника ничем не ограничено (если не учитывать, что для очень высоких орбит на спутник начинают действовать другие тела Солнечной системы). Например, если период обращения спутника вдвое больше периода обращения Земли, то за один виток спутника Земля сделает два оборота и долгота проекции уменьшится ровно на 360°. Это нам подходит (данные вновь надо читать по убыванию номеров). Если же спутник на высокой орбите движется против направления вращения Земли, то за один оборот спутника Земля делает более одного оборота и долгота проекции должна уменьшиться более чем на 720° – это нам не подходит. Наконец при движении по вытянутой эллиптической орбите возможны случаи, когда спутник пересекает геостационарную орбиту. Если такой спутник вращается по направлению вращения Земли, то в некоторых частях орбиты он «обгоняет» Землю (долгота растет), а в некоторых «отстает» от Земли (долгота убывает). В нашем случае этого не наблюдается. Если же такой спутник движется против направления вращения Земли, то долгота проекции монотонно убывает, т.е. противоречий с данными нет, но этот вариант мы уже отбросили выше.

Итак, мы видим два варианта – низкая нисходящая орбита (против вращения Земли) или высокая восходящая орбита. Согласно данным, изменение долготы проекции составило 396°. В первом случае получаем, что за время витка Земля повернулась на $396 - 360 = 36^{\circ}$, т.е. период обращения спутника составляет одну десятую периода обращения Земли, т.е. 8640 с. Нам надо найти a – большую полуось эллипса орбиты. Согласно третьему закону Кеплера отношение квадратов периодов обращения равно отношению кубов больших полуосей орбит. Значит, если мы при вычислениях заменим эллиптическую орбиту спутника на круговую (радиус круга равен большой полуоси нашей орбиты), то период обращения не изменится. Итак, можно работать с круговой орбитой. Так как $R^3\omega^2 = GM = \mu$ (здесь G - гравитационная постоянная, M – масса Земли, а их произведение обозначено $\mu \approx 4 \cdot 10^{14}$ - гравитационный параметр), то $R^3 = \frac{\mu T^2}{4\pi^2}$. Отсюда $a \approx 9100$ км. На самом деле, учитывая погрешности в данных (нам даны целые градусы, значит, округление составляет до $0{,}5^{o}$), получаем $a \in [8900; 9500]$ км. Во втором варианте за время витка Земля повернулась на $396 + 360 = 756^{o}$, т.е. период обращения спутника равен $T = 50{,}4$ ч $= 181440$ с. Подставляя в ту же формулу, находим $a \approx 69350$ км (с той же погрешностью).

Попробуем найти эксцентриситет орбиты. Вытянутость орбиты вызывает неравномерность движения спутника (быстрое движение в перигее и медленное в апогее). В результате данные наблюдений (по условию, они проводились через равные промежутки времени) будут неравномерно расположены вдоль проекции спутника. Видим, что при первом пересечении экватора проекцией спутника данные «идут часто», а при втором – «редко», т.е. именно здесь спутник проходил апогей и перигей своей орбиты. Для низкой нисходящей орбиты угловая скорость проекции равна сумме угловой скорости спутника и угловой скорости Земли. Т.е. большая угловая скорость проекции соответствует перигею («редкие» данные), а меньшая – апогею. Для высокой восходящей орбиты угловая скорость долготы проекции равна разности угловой скорости Земли и угловой скорости долготы спутника. Тогда в перигее долгота проекции должна меняться медленнее, чем в апогее! При этом широта (а в окрестности экватора изменение широты проекции можно считать примерно линейной функцией) все равно должна меняться быстрее в перигее, чем в апогее. Видим, что у нас такого не наблюдается – при первом пересечении экватора медленно меняется и широта, и долгота; при втором пересечении – и широта, и долгота меняются быстро. Значит, вариант с высокой восходящей орбитой можно отбросить.

Согласно второму закону Кеплера, радиус-вектор, направленный из центра Земли на спутник заметает за равные промежутки времени равные площади. Для малых промежутков времени траекторию можно приближенно считать круговой, т.е. $S = R^2 \cdot \omega \cdot \Delta t/2$. Тогда $\frac{R_{\text{апогея}}}{R_{\text{перигея}}} = \sqrt{\frac{\omega_{\text{перигея}}}{\omega_{\text{апогея}}}}$. Возьмем два измерения возле точки перигея и два измерения возле апогея и попробуем найти дробь в правой части. Поверхность Земли на коротких расстояниях можно приближенно считать плоской. В окрестности экватора сдвиги на один градус широты и на один градус долготы примерно равны. Тогда $\omega_{\text{апогея}} \approx \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$ (в градусах). Аналогично, $\omega_{\text{перигея}} \approx \sqrt{394} \approx 19{,}75^o$. Для более точных выкладок можно использовать сферическую теорему Пифагора: $\omega_{\text{перигея}} = \arccos(\cos(13^o) \cdot \cos(15^o)) \approx 19{,}85^o$. Получаем $\frac{R_{\text{апогея}}}{R_{\text{перигея}}} \approx 3$, или для эксцентриситета орбиты имеем $\frac{1+e}{1-e} \approx 3$, т.е. $e \approx 0{,}5$. Наши выкладки однако, очень неустойчивы к погрешностям данных. Учитывая, что градусы в данных даны с погрешностями в $0{,}5^o$, а высота орбиты тоже найдена приближенно, получим $\frac{R_{\text{апогея}}}{R_{\text{перигея}}} \in [2{,}26\,; 4{,}61]$ или $e \in [0{,}38\,; 0{,}64]$. Учтем еще, что мы действовали в рамках линейного приближения и не учитывали вращение Земли (оно вносит поправку в изменение долготы порядка 10% - отношение угловой скорости Земли к средней угловой скорости спутника). Таким образом, реально можем только оценить $e \in (0{,}3\,; 0{,}7)$. Эту оценку можно уточнить из других соображений. Заметим, что минимальная высота в перигее не может быть меньше 120 км – иначе спутник сгорит в атмосфере, т.е. $R_{\text{перигея}} \geq 6500$. Так как $R_{\text{апогея}} + R_{\text{перигея}} = 2a$, то $R_{\text{апогея}} \leq 2a - 6480 \leq 19000 - 6500 = 12500$ км, а $e \leq 0{,}32$.

Ответ: наклон орбиты 60^o, большая полуось орбиты равна примерно 9500 км, высота в перигее порядка 120 км, высота в апогее порядка 12500 км.

6. На орбиту выведен спутник, оснащенный, в том числе, принимающей/передающей антенной, электрическими ракетными двигателями (они поддерживают высоту спутника на орбите и его ориентацию) и солнечными батареями отечественного производства (с односторонней рабочей поверхностью). Вывод прошел в штатном режиме, спутник вышел на заданную орбиту. Однако в силу ошибки программистов спутник ориентировался на орбите неверно – с поворотом на 180 градусов. В результате антенна спутника направлена от Земли, а рабочая поверхность солнечных батарей – к Земле. Двигатели спутника автоматически поддерживают его в этой (неверной) ориентации. Центр управления полетами не может связаться со спутником и провести коррекцию, так как антенна спутника экранируется самим спутником. Предложите центру управления полетами способ исправить ситуацию.

Решение. Варианты действий:

- установить связь через другой спутник, находящийся на более высокой орбите. Сложно реализовать в силу технических сложностей: каждый спутник работает на своей частоте связи.

- установить связь с помощью отраженного от Луны сигнала. Сложно реализовать, так как спутник автоматически отфильтровывает как «шум» все слабые сигналы.

- дождаться пока сядут аккумуляторы, после чего спутник перестанет поддерживать свою ориентацию на орбите. Двигаясь без вращения относительно неподвижной системы координат, спутник будет вращаться относительно системы координат, связанной с центром Земли. А именно, за половину витка спутник будет совершать поворот на 180 градусов (антенна будет направлена к Земле). В задаче описывается реальная ситуация – именно так и поступил центр управления полетами. Сразу после выведения, когда проблема была обнаружена, центр управления вначале «нашел» спутник на орбите (при выведении любого космического аппарата параметры орбиты известны только приблизительно, затем они уточняются). Параметры орбиты были точно замерены, и появилась возможность «следить» за спутником. Был проведен примерный расчет – когда сядут аккумуляторы. Заранее была подготовлена «перепрошивка» программного обеспечения. Когда прошло расчетное время, центр начал периодически посылать на спутник направленный сигнал. Связь со спутником была установлена, после чего его ориентация была исправлена. Спутник до сих пор работает на орбите.