Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2021/22 учебного года для 9 класса

Задача 1. На гранях шестигранного игрального кубика расставлены числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Кубик бросают, и он падает на стол. После этого видны числа на всех гранях, кроме одной. Числа на пяти видимых гранях перемножаются. Найдите вероятность того, что это произведение делится на 16.

Ответ: $0,5$.

Решение. Если на невидимой грани нечётное число, то в произведении пяти оставшихся чисел присутствуют 2, 4 и 6, и оно делится на 16. Если на невидимой грани чётное число, то произведение остальных пяти цифр на 16 не делится – в его разложении на простые множители не будет четырёх двоек.

Задача 2. Найдите количество натуральных чисел, не превышающих 2022 и не входящих ни в арифметическую прогрессию $1, 3, 5, \ldots$, ни в арифметическую прогрессию $1, 4, 7, \ldots$

Ответ: 674.

Решение. Эти две прогрессии задают числа вида $1 + 2n$ и $1 + 3n$. Это означает, что искомые числа есть числа вида $6n$ и $6n - 4$, $n \in \mathbb{N}$. Так как 2022 кратно 6, то чисел вида $6n$ будет $\frac{2022}{6} = 337$, и чисел вида $6n - 4$ будет столько же. Значит, всего чисел $337 \cdot 2 = 674$.

Задача 3. Найдите три последние цифры числа $10^{2022} - 9^{2022}$.

Ответ: 119.

Решение. Так как $A = \ 10^{2022} - (10-1)^{2022} = 10^{2022} - 10^{2022} + 2022 \cdot 10^{2021} - C_{2022}^2 \cdot 10^{2022} + \ldots + C_{2022}^3 \cdot 10^3 - C_{2022}^2 \cdot 10^2 + C_{2022}^1 \cdot 10 - 1$, то $A \pmod{1000} \equiv -C_{2022}^2 \cdot 100 + C_{2022}^1 \cdot 10 - 1 \pmod{1000} \equiv -\frac{2022 \cdot 2021 \cdot 100}{2} + 20220 - 1 \pmod{1000} \equiv -100 + 220 - 1 \equiv 119$.

Задача 4. Семейство Дурслей скрывает Гарри Поттера на острове, который находится на расстоянии 9 км от берега. Берег прямолинейный. На берегу, в 15 километрах от той точки берега, которая ближе всего к острову, находится Хагрид на волшебном мотоцикле, и он хочет добраться до Гарри как можно быстрее. По побережью мотоцикл едет со скоростью 50 км/час, а над морем летит со скоростью 40 км/час. План у Хагрида такой: сначала проехать X километров по побережью, а потом взять курс напрямик на остров. Какое значение X наилучшим образом подходит для целей Хагрида?

Ответ: 3.

Решение. Пусть A — точка, откуда едет Хагрид, B — остров, а C — точка, где мотоцикл повернул в море. Время поездки $t = \frac{AC}{50} + \frac{BC}{40} = pAC + qBC = q(\frac{p}{q}AC + BC)$, где $p = \frac{1}{50}, q = \frac{1}{40}$. Значит, мы стремимся минимизировать $\frac{p}{q}AC + BC$. Отметим на берегу произвольную точку D, построим на AD как на диаметре окружность радиуса $q \cdot s : 2$ (s произвольное). Нарисуем окружность с центром в D и радиусом $p \cdot s$, пусть эта окружность пересекает первую на суше в точке E. На прямую AE опустим перпендикуляр BF, и он будет пересекать береговую линию в наилучшей точке C.

Докажем, что $\frac{p}{q}AC + BC$ минимально. Из подобия треугольников AFC и AED следует, что $CF/AC = DE/AD = \frac{p}{q}$, $CF = \frac{p}{q}AC$, то есть $\frac{p}{q}AC + BC = BF$. Если взять на побережье любую другую точку M и оценить $\frac{p}{q}AM + BM$, то получится следующее. $\frac{p}{q}AM + BM = KM + MB$, где KM — перпендикуляр из K на AE. А в свою очередь $KM + MB > BK > BF$.

Пусть L — ближайшая к острову точка берега. Треугольники BCL и ACF подобны, откуда $CL = \frac{BL \cdot CF}{AF}$. Следовательно, $CL = 12$ и $AC = X = 3$.

Задача 5. Найдите все значения x, при каждом из которых среднее из трёх чисел

$$a = x^3 - 100x, \quad b = x^4 - 16, \quad c = x + 20 - x^2$$

положительно (*средним* из трёх данных чисел a, b, c называется число v в тройке $u \leqslant v \leqslant w$, получаемой в результате упорядочения данных чисел по нестрогому возрастанию).

Ответ: $-10 < x < 0$, $2 < x < 5$, $x > 10$.

Решение. Среднее из трёх чисел положительно тогда и только тогда, когда положительны хотя бы два из трёх чисел. Решая соответствующую совокупность из систем двух неравенств, получим ответ.

Задача 6. Точка A на плоскости находится на одинаковом расстоянии от всех точек пересечения двух парабол, заданных в декартовой системе координат на плоскости уравнениями $y = -3x^2 + 2$ и $x = -4y^2 + 2$. Найдите это расстояние.

Ответ: $\frac{\sqrt{697}}{24}$.

Решение. Изобразив параболы с данными уравнениями, легко заметить, что они имеют 4 общие точки. Значит, равноудалённая от них точка может быть максимум одна. Перепишем уравнения парабол в виде $x^2 + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3} = 0$ и $y^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} = 0$ и сложим. Получим уравнение

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y - \frac{7}{6} = 0 \Longleftrightarrow \left(x + \frac{1}{8}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{697}{576}.$$

Это уравнение окружности с центром $\left(-\frac{1}{8}; -\frac{1}{6}\right)$ радиуса $\frac{\sqrt{697}}{24}$, и ему удовлетворяют координаты всех точек пересечения парабол, а центр окружности удалён от этих точек пересечения на расстояние, равное радиусу окружности.

Задача 7. Есть некоторое количество одинаковых целлофановых пакетов, которые можно вкладывать друг в друга. Если внутри одного из пакетов оказались все остальные пакеты, назовём такую ситуацию «пакетом пакетов». Посчитайте, сколькими способами можно сложить «пакет пакетов» из 10 пакетов.

Пояснение. Обозначим скобочками пакет.
Если у нас был один пакет, то способ сложить «пакет пакетов» всего один: $()$.
Два пакета тоже можно сложить всего одним способом: $(())$.
Три пакета можно сложить двумя разными способами: $(()())$ *и* $((()))$, *и т.д.*
Порядок пакетов внутри пакета неважен. Например, вариант $((())())$ *не отличается от* $(()(()))$.

Ответ: 719.

Решение. Если Π_n обозначает число способов для n пакетов, то:

$$\Pi_1 = 1, \Pi_2 = 1, \Pi_3 = 2, \Pi_4 = 4, \Pi_5 = 9, \Pi_6 = 20, \Pi_7 = 48, \Pi_8 = 115, \Pi_9 = 286,$$

$$\Pi_{10} = 719.$$

Решается задача перебором вариантов. Например, если возьмём Π_5 :
$\Pi_5 = P_4 + P_3 + P_2 + P_1$, где P_k — число способов, соответствующих случаю, когда в корневом пакете находится k пакетов.
$P_4 = 1$, способ всего один: $(()()()())$.
$P_3 = 1$, способ тоже один: $((())()())$.
$P_2 = 3$, способов разбить 4 пакета на 2 кучки два: 3 и 1, 2 и 2. Первому способу соответствует $(\Pi_3())$ — два варианта, второму способу — один вариант, $((())(()))$.
$P_4 = \Pi_4$ способов: (Π_4).
В сумме получается 1+1+(2+1)+4=9.
С ростом n возникнут случаи, когда надо внимательно относиться к комбинаторике. Скажем, 8 пакетов можно разместить так: $(\Pi_3\ \Pi_3\ \Pi_1)$, а можно так: $(\Pi_3\ \Pi_2\ \Pi_2)$. Во втором случае это будет $\Pi_3 \cdot \Pi_2 \cdot \Pi_2 = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$ способа, а в первом — не $\Pi_3 \cdot \Pi_3 \cdot \Pi_1 = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$, а на самом деле всего три, потому что порядок расположения тройных пакетов не важен.

$П_6$.

P_5: (( ) ( ) ( ) ( ) ( )) — $+1$

P_4: ((( )) ( ) ( ) ( )) — $+1$

P_3: (( ) ( ) ( ))

Остаётся распихать 2 пакета: → 2 0; → 1 1

▶ ((( )) (( )) ( )) — 1 1 — $+1$

▶ (( ) ( ) ( ))

$\underbrace{2}_{3} \Rightarrow П_3 \Rightarrow$ $+2$

P_2: (( ) ( ))

Остаётся распихать 3 пакета: → 3 0; → 2 1

▶ (( ) ( ))

$\underbrace{3}_{4} \Rightarrow П_4 \Rightarrow$ $+4$

▶ (( ) (( )))

$\underbrace{2}_{3} \Rightarrow П_3 \Rightarrow$ $+2$

P_1: (( ))

4

5 $\Rightarrow$ $П_5$ $\Rightarrow$ +9

$$П_6 = P_5 + P_4 + P_3 + P_2 + P_1 = 3 + 4 + 4 + 9 =$$
$$= 20.$$

$П_7$

P_6: (( )( )( )( )( )( )) +1

P_5: ((()) ( ) ( ) ( ) ( )) +1

P_4: (( )( )( )( ))

Остаётся распихать 2 пакета: → 2 0, → 1 1 +3 (см P_3 выше)

P_3: (( )( )( ))

Остаётся распихать 3 пакета:

1	1	1	+1
2	1	0	$П_3$ = +2
3	0	0	$П_4$ = +4

P_2: $(\,(\,)\;(\,)\,)$

Остаётся распихать 4 пакета: $\begin{matrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{matrix}$

$П_5 = +5$

$П_4 = +4$

22: $(\;(()())\;\;(()())\;)$

$(\;((()))\;\;(()())\;)$ $+3$

$(\;((()))\;\;((()))\;)$

P_1: $(\,(\underbrace{\qquad\quad \rceil_5}_{6})\,)$ $\Rightarrow П_6$ $+20$

$$П_7 = P_6 + P_5 + P_4 + P_3 + P_2 + P_1 =$$

$$= 20 + 3 + 13 + 7 + 5 = 48$$

$П_8$

P_7: $(\,(\,)(\,)(\,)(\,)(\,)(\,)(\,)\,)$ $+1$

P_6: $+1$

P_5: $+3$

P_4: (( ) ( ) ( ) ( ))

Остаётся распихать 3 пакета → 3 0 0; 2 1 0; 1 1 1 — +7

P_3: (( ) ( ) ( ))

Остается распихать 4 пакета → 4 0 0; 3 1 0; 2 2 0 — +16; 2 1 1 — $+\Pi_3 = +2$

P_2: (( ) ( ))

Остается распихать 5 пакетов →
5 0 — $+\Pi_6 = +20$
4 1 — $+\Pi_5 = +9$
3 2 — $+\Pi_4 \cdot \Pi_3 = +8$

P_1: (( )) $+\Pi_7 = +48$

$\Rightarrow \Pi_8 = P_1 + \ldots + P_7 = 48 + 37 + 18 + 7 + 5 = 115$

Π_9:

P_8: +1

P_7: +1

P_6: +3

P_5: +7

P_4 : (( ) ( ) ( ) ( ))

Остаётся распихать 4 пакета

$$\left.\begin{array}{l} 4\ 0\ 0\ 0 \\ 3\ 1\ 0\ 0 \\ 2\ 2\ 0\ 0 \\ 2\ 1\ 1\ 0 \end{array}\right\} +18$$

$1\ 1\ 1\ 1 \quad +1$

P_3 : (( ) ( ) ( ))

Остаётся распихать 5 пакетов

$$\left.\begin{array}{l} 5\ 0\ 0 \\ 4\ 1\ 0 \\ 3\ 2\ 0 \end{array}\right\} +37$$

$3\ 1\ 1 \quad + \Pi_4 = +4$

$2\ 2\ 1 \quad +3$

P_2 : (( ) ( ))

Остаётся распихать 6 пакетов

$6\ 0 \quad +\Pi_7 = +48$

$5\ 1 \quad +\Pi_6 = +20$

$4\ 2 \quad +\Pi_5 \cdot \Pi_3 = +18$

$3\ 3$

Π_4 : (((( ))))

((( )) ( ))

(( ) ( ) ( ))

((( ) ( )))

$\Rightarrow$ для $3\ 3$: $4+3+2+1 = \frac{4+1}{2} \cdot 4 = +10$

P_1 : $+\Pi_8 = +115$

$\Rightarrow \Pi_9 = P_1 + \ldots + P_8 = 115 + 30 + 48 + 18 + 44 + 19 + 12 =$

$= 286$

Π_{10}:

P_9: $+1$

P_8: $+1$

P_7: $+3$

P_6: $+7$

P_5: $+19$

P_4: (( ) ( ) ( ) ( ))

Остаётся распихать 5 пакетов:

5	0	0	0	
4	1	0	0	
3	2	0	0	$+44$
3	1	1	0	
2	2	1	0	
2	1	1	1	$+\Pi_3 = +2$

P_3: (( ) ( ) ( ))

Остаётся распихать 6 пакетов

6	0	0	
5	1	0	$+96$
4	2	0	
3	3	0	
4	1	1	$+\Pi_5 = +9$
3	2	1	$+\Pi_4 \cdot \Pi_3 = +8$
2	2	2	

Π_3: (( ) ( )) А

((( ))) Б

ААБ
АББ
ААА
БББ

$\Rightarrow$ 2 2 2 $+4$

P_2: (( ) ( ))

Остается распихать 7 пакетов:

7 0 $+\Pi_8 = +115$

6 1 $+\Pi_7 = +48$

5 2 $+\Pi_6 \cdot \Pi_3 = +40$

4 3 $+\Pi_5 \cdot \Pi_4 = +36$

P_1: $+\Pi_9 = +286$

$\Rightarrow \Pi_{10} = P_1 + \ldots + P_9 = 286 + 115 + 48 + 40 + 36 + 117 + 46 + 19 + 12 = 719$

Ответ: 719.