

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2021/22 учебного года для 11 класса

Задача 1. Какое из чисел больше:

$$A = \frac{\sqrt[6]{4 + 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3} - 1}}{\sqrt[3]{2}} \text{ или } B = \frac{3}{(1 \cdot 2)^2} + \frac{5}{(2 \cdot 3)^2} + \dots + \frac{77}{(38 \cdot 39)^2} + \frac{79}{(39 \cdot 40)^2}?$$

Задача 2. Загадано 2021-значное натуральное число, любые две соседние цифры которого (расположенные в том же порядке) образуют двузначное число, делящееся или на 19, или на 23. Загаданное число начинается с цифры 4. Какой цифрой оно заканчивается?

Задача 3. Дана функция

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[11]{1 - x^{11}}}.$$

Вычислите

$$f(f(f(f(f(\dots f(2022)))))),$$

где функция f применяется 1306 раз.

Задача 4. Угол при вершине в осевом сечении конуса равен 60° . Снаружи этого конуса расположены 17 шаров радиуса 2, каждый из которых касается двух соседних шаров, боковой поверхности конуса и плоскости его основания. Найдите радиус основания конуса.

Задача 5. Если действительные числа a, b, c упорядочить по нестрогому возрастанию, получив тройку $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, то число x_2 будем называться средним из чисел a, b, c . Найдите все значения t , при каждом из которых среднее из трёх чисел

$$a = t^3 - 81t; \quad b = 11^t - 121; \quad c = \sin t - \frac{1}{2}$$

положительно.

Задача 6. При каких значениях параметра $a \in \mathbb{R}$ наибольшее расстояние между корнями уравнения (не обязательно соседними)

$$a \operatorname{tg}^3 x + (2 - a - a^2) \operatorname{tg}^2 x + (a^2 - 2a - 2) \operatorname{tg} x + 2a = 0,$$

принадлежащими интервалу $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, принимает наименьшее значение? Найдите это наименьшее значение.

Задача 7. Высота AM остроугольного треугольника ABC пересекается с его другими высотами в точке O . Точка K лежит на отрезке BC так, что величина угла AKO максимальна. Найдите MK , если $BM = 5$, $MC = 3$.