Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2021/22 учебного года для 11 класса

Задача 1. Какое из чисел больше:

$$A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{97}{(48\cdot 49)^2} + \frac{99}{(49\cdot 50)^2} \text{ или } B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}?$$

Задача 2. Загадано 2021-значное натуральное число, любые две соседние цифры которого (расположенные в том же порядке) образуют двузначное число, делящееся или на 19, или на 23. Загаданное число начинается с цифры 1. Какой цифрой оно заканчивается?

Задача 3. Дана функция

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}.$$

Вычислите

$$f(f(f(f(f(\ldots f(2022))))\ldots)),$$

где функция f применяется 1303 раза.

Задача 4. Угол при вершине в осевом сечении конуса равен 60°. Внутри этого конуса расположены 19 шаров радиуса 3, каждый из которых касается двух соседних шаров, боковой поверхности конуса и плоскости его основания. Найдите радиус основания конуса.

Задача 5. Если действительные числа a, b, c упорядочить по нестрогому возрастанию, получив тройку $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$, то число x_2 будем называться средним из чисел a, b, c. Найдите все значения t, при каждом из которых среднее из трёх чисел

$$a = t^3 - 144t; \quad b = 2^t - 256; \quad c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

положительно.

Задача 6. При каких значениях параметра $a \in \mathbb{R}$ наибольшее расстояние между корнями (не обязательно соседними) уравнения

$$a\operatorname{ctg}^3 x + (a^2 - a - 3)\operatorname{ctg}^2 x + (3 - 3a - a^2)\operatorname{ctg} x + 3a = 0,$$

принадлежащими интервалу $(0;\pi)$, принимает наименьшее значение? Найдите это наименьшее значение.

Задача 7. Высота BF остроугольного треугольника ABC пересекается с его другими высотами в точке P. Точка N лежит на отрезке AC так, что величина угла BNP максимальна. Найдите FN, если $AF = 7$, $FC = 2$.