Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2021/22 учебного года для 11 класса

Задача 1. Какое из чисел больше:

$$A = \frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} \text{ или } B = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{117}{(58\cdot 59)^2} + \frac{119}{(59\cdot 60)^2}?$$

Задача 2. Загадано 2022-значное натуральное число, любые две соседние цифры которого (расположенные в том же порядке) образуют двузначное число, делящееся или на 19, или на 23. Загаданное число начинается с цифры 4. Какой цифрой оно заканчивается?

Задача 3. Дана функция

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}.$$

Вычислите

$$f(f(f(f(f(...f(2022))))...)),$$

где функция f применяется 1304 раза.

Задача 4. Угол при вершине в осевом сечении конуса равен 60°. Снаружи этого конуса расположены 17 шаров радиуса 2, каждый из которых касается двух соседних шаров, боковой поверхности конуса и плоскости его основания. Найдите радиус основания конуса.

Задача 5. Если действительные числа a, b, c упорядочить по нестрогому возрастанию, получив тройку $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$, то число x_2 будем называться средним из чисел a, b, c. Найдите все значения t, при каждом из которых среднее из трёх чисел

$$a = t^3 - 144t; \quad b = 2^t - 256; \quad c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

положительно.

Задача 6. При каких значениях параметра $a \in \mathbb{R}$ наибольшее расстояние между корнями (не обязательно соседними) уравнения

$$a \operatorname{ctg}^3 x + (2a^2 - a - 2)\operatorname{ctg}^2 x + (2 - 4a - 2a^2)\operatorname{ctg} x + 4a = 0,$$

принадлежащими интервалу $(0; \pi)$, принимает наименьшее значение? Найдите это наименьшее значение.

Задача 7. Высота AM остроугольного треугольника ABC пересекается с его другими высотами в точке O. Точка K лежит на отрезке BC так, что величина угла AKO максимальна. Найдите MK, если $BM = 5$, $MC = 3$.