Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2021/22 учебного года для 11 класса

Задача 1. Какое из чисел больше:

$$A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{87}{(43\cdot 44)^2} + \frac{89}{(44\cdot 45)^2} \text{ или } B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}?$$

Задача 2. Загадано 2021-значное натуральное число, любые две соседние цифры которого (расположенные в том же порядке) образуют двузначное число, делящееся или на 19, или на 23. Загаданное число начинается с цифры 1. Какой цифрой оно заканчивается?

Задача 3. Дана функция

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}.$$

Вычислите

$$f(f(f(f(f(...f(2022))))...)),$$

где функция f применяется 1304 раза.

Задача 4. Угол при вершине в осевом сечении конуса равен 60°. Внутри этого конуса расположены 13 шаров радиуса 2, каждый из которых касается двух соседних шаров, боковой поверхности конуса и плоскости его основания. Найдите радиус основания конуса.

Задача 5. Если действительные числа a, b, c упорядочить по нестрогому возрастанию, получив тройку $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$, то число x_2 будем называться средним из чисел a, b, c. Найдите все значения t, при каждом из которых среднее из трёх чисел

$$a = t^3 - 81t; \quad b = 11^t - 121; \quad c = \sin t - \frac{1}{2}$$

положительно.

Задача 6. При каких значениях параметра $a \in \mathbb{R}$ наибольшее расстояние между корнями (не обязательно соседними) уравнения

$$a\operatorname{tg}^3 x + (1 - a - 2a^2)\operatorname{tg}^2 x + (2a^2 - 2a - 1)\operatorname{tg} x + 2a = 0,$$

принадлежащими интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, принимает наименьшее значение? Найдите это наименьшее значение.

Задача 7. Высота AM остроугольного треугольника ABC пересекается с его другими высотами в точке O. Точка K лежит на отрезке BC так, что величина угла AKO максимальна. Найдите MK, если $BM = 5$, $MC = 3$.