Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2021/22 учебного года для 10 класса

Задача 1. Найдите наименьшее натуральное число, обладающее следующим свойством: остаток от его деления на 20 на единицу меньше остатка от его деления на 21, а остаток от его деления на 22 равен 2.

Ответ: 838.

Решение. Искомое число равно $20k+a=21l+a+1=22m+2$, где $0\leqslant a\leqslant 19$ и $l,k,m\geqslant 0$. Из первого равенства и сравнения по модулю 20 получаем, что $l+1\equiv 0 \pmod{20}$. Так как ищем наименьшее число, то попробуем $l=19$, если это l не подойдёт, то рассмотрим $l=19+20=39$ и так далее. Ищем искомое число в виде $21\cdot 19+a+1=22m+2$, сравниваем по модулю 22: $3+a+1\equiv 2 \pmod{22}$, следовательно, $a\equiv 20 \pmod{22}$, что невозможно. Теперь ищем искомое число в виде $21\cdot 39+a+1=22m+2$, значит, $5+a+1\equiv 2 \pmod{22}$, то есть $a\equiv 18 \pmod{22}$. Число $21\cdot 39+18+1=838$ удовлетворяет условию и наименьшее по построению.

Задача 2. Треугольная пирамидка, все рёбра которой имеют длину 6 см, стоит на плоском столе. Пирамидку перекатывают по столу через рёбра 6 раз таким образом, что одна из её вершин всё время остаётся неподвижной, при этом два раза подряд через одно и то же ребро пирамидку не перекатывают. Найдите длину траектории, по которой за время этих перекатываний перемещается подвижная вершина пирамиды.

Ответ: $(\pi-\arccos\frac{1}{3})\cdot 12\sqrt{3}$ см.

Решение. Обозначим пирамидку $ABCD$. Пусть A — неподвижная вершина, а вершина D в начальный момент не касается поверхности стола. Пусть первое перекатывание осуществляется через ребро AB. Вершина D при этом перекатывании перемещается по дуге окружности с центром в середине H ребра AB и радиусом, равным апофеме пирамидки, то есть $3\sqrt{3}$ см. По теореме косинусов из треугольника CDH находим, что $\cos\angle CHD=\frac{1}{3}$, поэтому на дугу окружности, по которой движется точка D, опирается центральный угол величиной $\pi-\arccos\frac{1}{3}$. Значит, длина этой дуги равна $(\pi-\arccos\frac{1}{3})\cdot 3\sqrt{3}$ см.
При втором перекатывании (через ребро AD) точка D остается неподвижной, при третьем (через рёбро AB) проходит по дуге такой же длины, как при первом перекатывании, а следующие три перекатывания происходят аналогично первым трём, и в результате пирамидка возвращается в исходное положение. При этом точка D перемещается по траектории длиной $4\cdot(\pi-\arccos\frac{1}{3})\cdot 3\sqrt{3}$ см.

Задача 3. Найдите три последние цифры числа $10^{2022}-9^{2022}$.

Ответ: 119.

Решение. Так как $A=\ 10^{2022}-(10-1)^{2022}=10^{2022}-10^{2022}+2022\cdot 10^{2021}-C_{2022}^{2}\cdot 10^{2022}+\ldots+C_{2022}^{3}\cdot 10^{3}-C_{2022}^{2}\cdot 10^{2}+C_{2022}^{1}\cdot 10-1$, то $A \pmod{1000}\equiv -C_{2022}^{2}\cdot 100+C_{2022}^{1}\cdot 10-1 (\bmod\ 1000)\equiv -\frac{2022\cdot 2021\cdot 100}{2}+20220-1 (\bmod\ 1000)\equiv -100+220-1\equiv 119$.

Задача 4. По окружности выписаны 2022 единицы. Два игрока ходят по очереди: за один ход игрок стирает два соседних числа из написанных и пишет вместо них их сумму (один раз). Выигрывает тот, кто получит число 4. Если в конце игры остаётся одно число, не равное 4, игра оканчивается вничью. Может ли кто-то из игроков обеспечить себе победу, и если да, то каким образом?

Ответ: Выиграет второй.

Решение. Выигрывает второй. Стратегия: повторять ходы первого игрока симметрично относительно центра окружности до тех пор, пока после хода первого игрока не возникнут либо две соседствующие двойки, либо тройка, соседствующая с единицей. В этих случаях второй игрок перехватывает инициативу и побеждает.

Почему такие ситуации непременно должны возникнуть? Почему игру нельзя свести к ничьей? Давайте представим, что на поле пока ещё нет чисел больше двух. Если игра идёт, то рано или поздно должны появиться числа, большие двух. Как это произойдёт? Из единиц и двоек можно сложить либо тройку, либо четвёрку. Четвёрка складывается из двух соседствующих двоек и приносит победу. Если после хода первого игрока на поле нет 2 2, то и после зеркального хода второго 2 2 на поле не появится. Если первый допустил 2 2, то второй побеждает.

Значит, рассмотрим тройку. Чтобы тройка не привела второго к победе, нужно, чтобы с ней не соседствовала единица, то есть на поле нужно сочетание 2 3 2. А как могло выглядеть это поле ход назад? 2 (2 1) 2, опять получаем двойки по соседству.

Поэтому появления плохой для себя комбинации первый игрок избежать не может.

Задача 5. Число a таково, что уравнение $t^3+4t^2+4t+a=0$ имеет три действительных корня $x<y<z$. Определите, какие числовые значения может принимать выражение

$$A=x^3-4y^2-4z^2-4y-4z+32.$$

Ответ: $\left(14\frac{22}{27};16\right)$.

Решение. Пусть $P\left(t\right)=t^3+4t^2+4t+a=\left(t-x\right)\left(t-y\right)\left(t-z\right)$. Тогда $x+y+z=-4, xy+yz+xz=4, xyz=-a$ (это получается или по теореме Виета, или прямым сравнением левой и правой части). Далее $A=x^3-4y^2-4z^2-4y-4z+32=\left(-4x^2-4x-a\right)-4y^2-4z^2-4y-4z+32=-4\left(x^2+y^2+z^2\right)-4\left(x+y+z\right)-a+32=-4\left(x+y+z\right)^2+8\left(xy+yz+zx\right)-4\left(x+y+z\right)-a+32=-4\cdot\left(-4\right)^2+8\cdot4-4\cdot\left(-4\right)-a+32=16-a$. Осталось выяснить, при каких значениях а данное кубическое уравнение имеет три различных корня. Запишем уравнение в виде $a=-t^3-4t^2-4t=-t\left(t+2\right)^2$ и найдем экстремумы функции в правой части (например, с помощью производной, хотя можно обойтись и без неё). Получается, что эта функция имеет локальный минимум 0 в точке $t=-2$ и локальный максимум $\frac{32}{27}$ в точке $t=-\frac{2}{3}$. Это означает, что 3 различных корня у уравнения будет при $a\in\left(0;\frac{32}{27}\right)$. Значит, $A=16-a\in\left(16-\frac{32}{27};\ 16\right)=\left(14\frac{22}{27};16\right)=\left(\frac{400}{27};16\right)$.

Задача 6. Найдите координаты всех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от всех точек пересечения парабол, заданных в декартовой системе координат на плоскости уравнениями $y=2x^2-1$ и $x=4y^2-2$.

Ответ: $\left(\frac{1}{8};\frac{1}{4}\right)$.

Решение. Изобразив параболы с данными уравнениями, легко заметить, что они имеют 4 общие точки. Значит, равноудалённая от них точка может быть максимум одна. Перепишем уравнения парабол в виде $x^2-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}=0$ и $y^2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}=0$ и сложим. Получим уравнение

$$x^2+y^2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}y-1=0\Longleftrightarrow\left(x-\frac{1}{8}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{69}{64}.$$

Это уравнение окружности с центром $\left(\frac{1}{8};\frac{1}{4}\right)$ радиуса $\frac{\sqrt{69}}{8}$, и ему удовлетворяют координаты всех точек пересечения парабол, а центр окружности равноудалён от этих точек пересечения.

Задача 7. Есть некоторое количество одинаковых целлофановых пакетов, которые можно вкладывать друг в друга. Если внутри одного из пакетов оказались все остальные пакеты, назовём такую ситуацию «пакетом пакетов». Посчитайте, сколькими способами можно сложить «пакет пакетов» из 10 пакетов.

Пояснение. Обозначим скобочками пакет.
Если у нас был один пакет, то способ сложить «пакет пакетов» всего один: $()$.
Два пакета тоже можно сложить всего одним способом: $(())$.
Три пакета можно сложить двумя разными способами: $(()())$ *и* $((()))$, *и т.д.*
Порядок пакетов внутри пакета неважен. Например, вариант $((())())$ *не отличается от* $(()(()))$.

Ответ: 719.

Решение. Если Π_n обозначает число способов для n пакетов, то:

$$\Pi_1 = 1, \Pi_2 = 1, \Pi_3 = 2, \Pi_4 = 4, \Pi_5 = 9, \Pi_6 = 20, \Pi_7 = 48, \Pi_8 = 115, \Pi_9 = 286,$$

$$\Pi_{10} = 719.$$

Решается задача перебором вариантов. Например, если возьмём Π_5 :
$\Pi_5 = P_4 + P_3 + P_2 + P_1$, где P_k — число способов, соответствующих случаю, когда в корневом пакете находится k пакетов.
$P_4 = 1$, способ всего один: $(()()()())$.
$P_3 = 1$, способ тоже один: $((())()())$.
$P_2 = 3$, способов разбить 4 пакета на 2 кучки два: 3 и 1, 2 и 2. Первому способу соответствует $(\Pi_3())$ — два варианта, второму способу — один вариант, $((())(()))$.
$P_4 = \Pi_4$ способов: (Π_4).
В сумме получается 1+1+(2+1)+4=9.
С ростом n возникнут случаи, когда надо внимательно относиться к комбинаторике. Скажем, 8 пакетов можно разместить так: $(\Pi_3\ \Pi_3\ \Pi_1)$, а можно так: $(\Pi_3\ \Pi_2\ \Pi_2)$. Во втором случае это будет $\Pi_3 \cdot \Pi_2 \cdot \Pi_2 = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$ способа, а в первом — не $\Pi_3 \cdot \Pi_3 \cdot \Pi_1 = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$, а на самом деле всего три, потому что порядок расположения тройных пакетов не важен.