

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
**Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике**  
Заключительный этап 2021/22 учебного года для 11 класса

---

**Задача 1.** Какое из чисел больше:

$$A = \frac{3}{(1 \cdot 2)^2} + \frac{5}{(2 \cdot 3)^2} + \dots + \frac{97}{(48 \cdot 49)^2} + \frac{99}{(49 \cdot 50)^2} \text{ или } B = \frac{\sqrt[6]{4 - 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3} + 1}}{\sqrt[3]{2}}?$$

**Задача 2.** Загадано 2022-значное натуральное число, любые две соседние цифры которого (расположенные в том же порядке) образуют двузначное число, делящееся или на 19, или на 23. Загаданное число начинается с цифры 9. Какой цифрой оно заканчивается?

**Задача 3.** Дана функция

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1 - x^5}}.$$

Вычислите

$$f(f(f(f(f(\dots f(2022)))))),$$

где функция  $f$  применяется 1303 раза.

**Задача 4.** Угол при вершине в осевом сечении конуса равен  $60^\circ$ . Внутри этого конуса расположены 13 шаров радиуса 2, каждый из которых касается двух соседних шаров, боковой поверхности конуса и плоскости его основания. Найдите радиус основания конуса.

**Задача 5.** Если действительные числа  $a, b, c$  упорядочить по нестрогому возрастанию, получив тройку  $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ , то число  $x_2$  будем называться средним из чисел  $a, b, c$ . Найдите все значения  $t$ , при каждом из которых среднее из трёх чисел

$$a = t^3 - 121t; \quad b = 2^t - 32; \quad c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

положительно.

**Задача 6.** При каких значениях параметра  $a \in \mathbb{R}$  наибольшее расстояние между корнями (не обязательно соседними) уравнения

$$a \operatorname{ctg}^3 x + (a^2 - a - 3) \operatorname{ctg}^2 x + (3 - 3a - a^2) \operatorname{ctg} x + 3a = 0,$$

принадлежащими интервалу  $(0; \pi)$ , принимает наименьшее значение? Найдите это наименьшее значение.

**Задача 7.** Высота  $CL$  остроугольного треугольника  $ABC$  пересекается с его другими высотами в точке  $Q$ . Точка  $S$  лежит на отрезке  $AB$  так, что величина угла  $CSQ$  максимальна. Найдите  $LS$ , если  $AL = 2$ ,  $LB = 5$ .