
Задача 1 (10 баллов)

В-1

В многоквартирном доме несколько подъездов, в каждом — одинаковое число этажей (больше одного). На всех этажах всех подъездов одинаковое число квартир (больше одной). Известно, что в каждом подъезде не больше 50 квартир. Сколько подъездов в этом доме, если всего в нём 385 квартир?

Ответ: 11.

Решение. Поскольку $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$, числа 5, 7 и 11 — это число квартир на этаже, число этажей и число подъездов (в некотором порядке). Но $5 \cdot 11 = 55 > 50$ и $7 \cdot 11 = 77 > 50$, поэтому 11 не может быть ни числом этажей в подъезде, ни числом квартир на этаже. Значит, в доме 11 подъездов.

В-2

В многоквартирном доме несколько подъездов, в каждом — одинаковое число этажей (больше одного). На всех этажах всех подъездов одинаковое число квартир (больше одной). Известно, что в каждом подъезде не больше 60 квартир. Сколько подъездов в этом доме, если всего в нём 455 квартир?

Ответ: 13.

В-3 В многоквартирном доме несколько подъездов, в каждом — одинаковое число этажей (больше одного). На всех этажах всех подъездов одинаковое число квартир (больше одной). Известно, что в каждом подъезде не больше 30 квартир. Сколько подъездов в этом доме, если всего в нём 231 квартира?

Ответ: 11.

В-4 В многоквартирном доме несколько подъездов, в каждом — одинаковое число этажей (больше одного). На всех этажах всех подъездов одинаковое число квартир (больше одной). Известно, что в каждом подъезде не больше 35 квартир. Сколько подъездов в этом доме, если всего в нём 273 квартиры?

Ответ: 13.

Задача 2 (10 баллов)

В-1

Первые 2021 натуральных чисел выписаны в ряд в некотором порядке. Вычисляют 2019 сумм стоящих подряд трех чисел из этого ряда. Какое максимальное количество из этих сумм может быть нечетным?

Ответ: 2018.

Решение. Если выписать 505 троек в порядке нечет-чет-чет, а потом 506 нечетных чисел, то нечетных сумм будет 2018. Все суммы не могут быть нечетными, поскольку числа в ряду, номера которых имеют одинаковые остатки при делении на 3, тогда имели бы одинаковую четность, а в первой тройке должно стоять либо одно нечетное число (тогда четных чисел среди первых 2021 натуральных чисел не меньше 1346) либо три нечетных, тогда все числа нечетные.

В-2 Первые 2025 натуральных чисел выписаны в ряд в некотором порядке. Вычисляют 2023 суммы стоящих подряд трех чисел из этого ряда. Какое максимальное количество из этих сумм может быть нечетным?

Ответ: 2022.

В-3 Первые 2029 натуральных чисел выписаны в ряд в некотором порядке. Вычисляют 2027 сумм стоящих подряд трех чисел из этого ряда. Какое максимальное количество из этих сумм может быть нечетным?

Ответ: 2026

В-4 Первые 2033 натуральных числа выписаны в ряд в некотором порядке. Вычисляют 2031 сумму стоящих подряд трех чисел из этого ряда. Какое максимальное количество из этих сумм может быть нечетным?

Ответ: 2030

Задача 3 (10 баллов)

В-1 Дорога из пункта A в пункт B длиной 11,5 км состоит из трёх участков: в гору, по равнине и под гору. Пешеход идёт в гору со скоростью 3 км/ч, по равнине — со скоростью 4 км/ч, под гору — со скоростью 5 км/ч. Известно, что на дорогу из A в B он потратил 2 ч 54 мин, а на обратный путь — 3 ч 6 мин. Какова длина (в км) участка пути, проходящего по равнине?

Ответ: 4

Решение. Пусть x — длина пути в гору, y — по равнине, z — под гору. Тогда $x+y+z=11{,}5$, $x/3+y/4+z/5=2{,}9$, $x/5+y/4+z/3=3{,}1$. Складывая последние два уравнения, находим $\frac{8}{15}(x+z)+y/2=6$. Следовательно, с учётом первого уравнения получаем $(\frac{8}{15}-\frac{1}{2})y=11{,}5\cdot\frac{8}{15}-6$, откуда $y=4$ км.

В-2 Дорога из пункта A в пункт B длиной 12,5 км состоит из трёх участков: в гору, по равнине и под гору. Пешеход идёт в гору со скоростью 3 км/ч, по равнине — со скоростью 4 км/ч, под гору — со скоростью 5 км/ч. Известно, что на дорогу из A в B он потратил 3 ч 6 мин, а на обратный путь — 3 ч 24 мин. Какова длина (в км) участка пути, проходящего по равнине?

Ответ: 5

В-3 Дорога из пункта A в пункт B длиной 10,5 км состоит из трёх участков: в гору, по равнине и под гору. Пешеход идёт в гору со скоростью 3 км/ч, по равнине — со скоростью 4 км/ч, под гору — со скоростью 5 км/ч. Известно, что на дорогу из A в B он потратил 2 ч 36 мин, а на обратный путь — 2 ч 54 мин. Какова длина (в км) участка пути, проходящего по равнине?

Ответ: 3

В-4 Дорога из пункта A в пункт B длиной 13,5 км состоит из трёх участков: в гору, по равнине и под гору. Пешеход идёт в гору со скоростью 3 км/ч, по равнине — со скоростью 4 км/ч, под гору — со скоростью 5 км/ч. Известно, что на дорогу из A в B он потратил 3 ч 24 мин, а на обратный путь — 3 ч 36 мин. Какова длина (в км) участка пути, проходящего по равнине?

Ответ: 6

Задача 4 (15 баллов)

В-1 В магазине продаются синие ручки по 14 рублей, красные — по 15 рублей и зелёные — по 16 рублей. Вася купил несколько ручек всех трёх цветов, потратив на них ровно 170 рублей. Какое наименьшее число красных ручек он мог купить?

Ответ: 2.

Решение. Пусть k — число синих ручек, l — красных, m — зелёных. Тогда из условия получаем уравнение $14k + 15l + 16m = 170$, где $k, l, m > 0$. Рассматривая остаток от деления этого числа на 15, получаем равенство $m = k + 5 + 15s$, где $s \in \mathbb{Z}$. Подставим это выражение в исходное уравнение и поделим обе его части на 15, получим $2k+l+16s = 6$. Поскольку $2k+l \geqslant 3$, то $s \leqslant 0$. Если $s \leqslant -2$, то $2k+l \geqslant 6+32 = 38$ и $170 = 14k+15l+16m \geqslant 14k+7l \geqslant 7 \cdot 38 > 170$ — противоречие. Следовательно, $s = 0$ или $s = -1$. При $s = 0$ с учётом условий $k, l > 0$ получаем два решения $k = 1$, $l = 4$ и $k = 2$ и $l = 2$, при этом $m = k + 5$ равно 6 и 7 соответственно. Рассмотрим случай $s = -1$. Поскольку $m = k+5-15 = k-10 \geqslant 0$, т. е. $2k \geqslant 20$, получаем $k = 10$ и $l = 2$, но при этом $m = 0$, поэтому данный случай невозможен. Таким образом, возможны лишь 2 случая: $k = 1, l = 4, m = 6$ или $k = 2, l = 2, m = 7$. Наименьшее возможное значение l равно 2.

В-2 В магазине продаются синие ручки по 14 рублей, красные — по 15 рублей и зелёные — по 16 рублей. Вася купил несколько ручек всех трёх цветов, потратив на них ровно 170 рублей. Какое наибольшее число красных ручек он мог купить?

Ответ: 4.

В-3 В магазине продаются синие ручки по 14 рублей, красные — по 15 рублей и зелёные — по 16 рублей. Вася купил несколько ручек всех трёх цветов, потратив на них ровно 170 рублей. Какое наименьшее число зелёных ручек он мог купить?

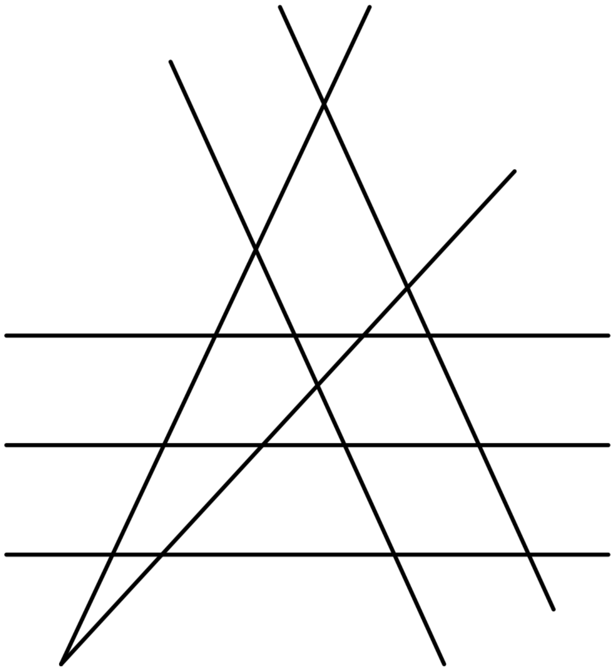
Ответ: 6.

В-4 В магазине продаются синие ручки по 14 рублей, красные — по 15 рублей и зелёные — по 16 рублей. Вася купил несколько ручек всех трёх цветов, потратив на них ровно 170 рублей. Какое наибольшее число зелёных ручек он мог купить?

Ответ: 7.

Задача 5 (15 баллов)

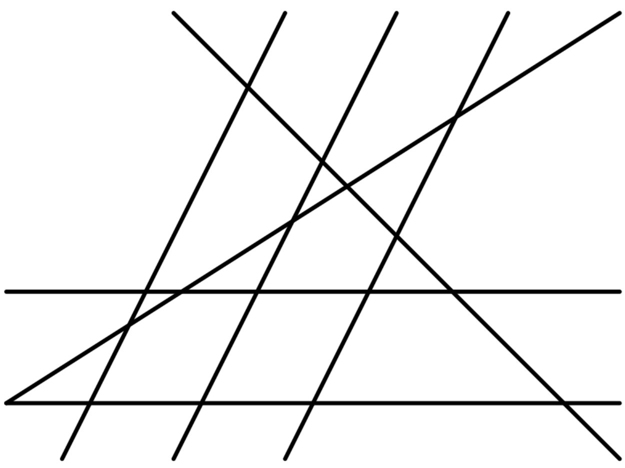
В-1 На рисунке изображено 7 прямых, среди которых три параллельных и ещё две параллельных. Никакие три прямые не пересекаются в одной точке. Сколько существует треугольников, все стороны каждого из которых лежат на этих прямых?



Ответ: 17

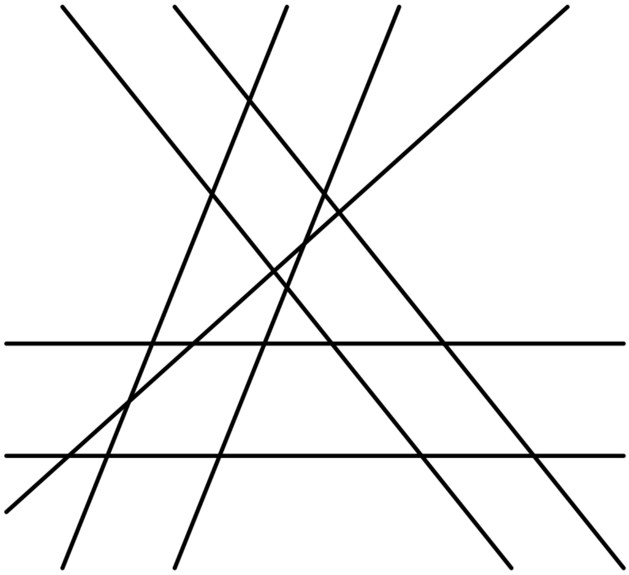
Решение. Три стороны треугольника должны лежать на трёх попарно непараллельных прямых. Если выбирать одну прямую из трёх параллельных, ещё одну из двух других параллельных и одну из двух оставшихся, получится $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ треугольников. Если выбрать одну прямую из трёх параллельных и две другие, не входящие в пару параллельных, получится ещё $3 \cdot 1 \cdot 1 = 3$ треугольника. Наконец, если выбрать одну прямую из двух параллельных и две другие, не входящие в пару параллельных, получится ещё $2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$ треугольника. Итого $12 + 3 + 2 = 17$ треугольников.

В-2 На рисунке изображено 7 прямых, среди которых три параллельных и ещё две параллельных. Никакие три прямые не пересекаются в одной точке. Сколько существует треугольников, все стороны каждого из которых лежат на этих прямых?



Ответ: 17

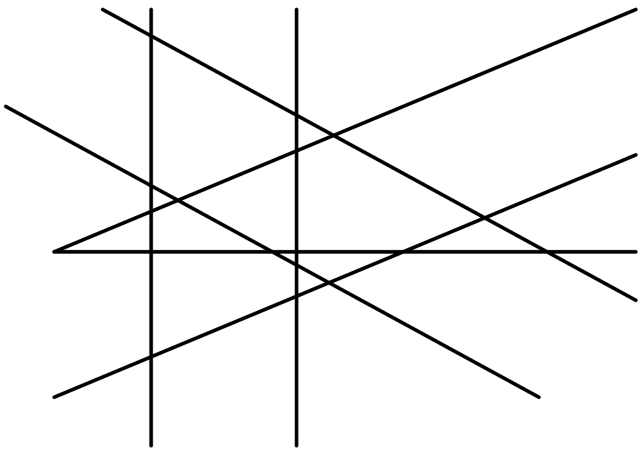
В-3 На рисунке изображено 7 прямых, среди которых три пары параллельных. Никакие три прямые не пересекаются в одной точке. Сколько существует треугольников, все стороны каждого из которых лежат на этих прямых?



Ответ: 20

Решение. Три стороны треугольника должны лежать на трёх попарно непараллельных прямых. Если выбирать по одной прямой из каждой пары параллельных, получится $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ треугольников. Если выбрать две прямые из двух пар параллельных и третью, не входящую в пары параллельных, получится ещё $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ треугольников (множитель 3 возникает оттого, что есть три способа определить, какую пару параллельных прямых мы не задействуем). Итого $12 + 8 = 20$ треугольников.

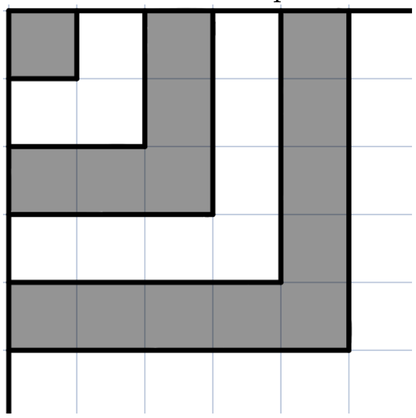
В-4 На рисунке изображено 7 прямых, среди которых три пары параллельных. Никакие три прямые не пересекаются в одной точке. Сколько существует треугольников, все стороны каждого из которых лежат на этих прямых?



Ответ: 20

Задача 6 (20 баллов)

В-1 Пол квадратного зала выкладывают квадратными плитками одинакового размера белого и серого цвета таким образом, как показано на рисунке: угловая плитка серая, затем три белые, затем пять серых, затем семь белых, и т. д. Чтобы таким образом выложить плиткой весь пол зала, белых плиток потребовалось на 60 больше, чем серых, причём резать плитки не пришлось. Сколько серых плиток потребовалось?

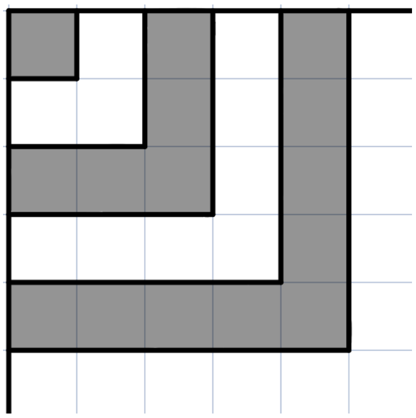


Ответ: 1770

Решение. Предположим сначала, что «слоёв» серой и белой плитки было поровну — по n штук. Тогда серых плиток было $1+5+9+\ldots+(4n-3)=\dfrac{(4n-2)\cdot n}{2}=2n^2-n$, а белых — $3+7+11+\ldots+(4n-1)=\dfrac{(4n+2)\cdot n}{2}=2n^2+n$. Разность числа белых и серых плиток в этом случае равна $2n=60$, откуда n=30 и $2n^2-n=1800-30=1770$.

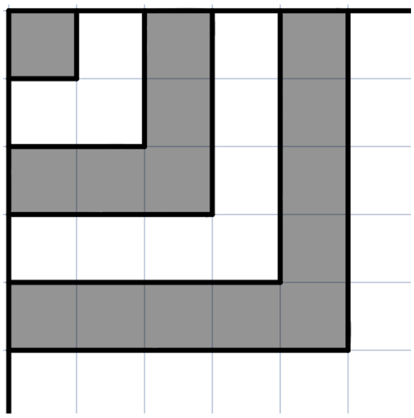
Пусть теперь «слоёв» серой плитки было n, а белой $n-1$. Тогда серых плиток было использовано $2n^2-n$, а белых $2(n-1)^2+(n-1)=2n^2-3n+1$. Разность числа белых и серых плиток в этом случае равна $1-2n=60$, что невозможно при целом n.

В-2 Пол квадратного зала выкладывают квадратными плитками одинакового размера белого и серого цвета таким образом, как показано на рисунке: угловая плитка серая, затем три белые, затем пять серых, затем семь белых, и т. д. Чтобы таким образом выложить плиткой весь пол зала, серых плиток потребовалось на 30 меньше, чем белых, причём резать плитки не пришлось. Сколько белых плиток потребовалось?



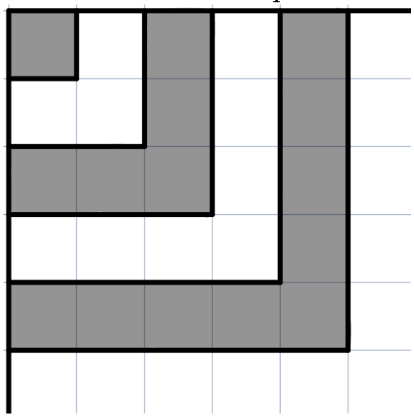
Ответ: 465

В-3 Пол квадратного зала выкладывают квадратными плитками одинакового размера белого и серого цвета таким образом, как показано на рисунке: угловая плитка серая, затем три белые, затем пять серых, затем семь белых, и т. д. Чтобы таким образом выложить плиткой весь пол зала, серых плиток потребовалось на 31 больше, чем белых, причём резать плитки не пришлось. Сколько белых плиток потребовалось?



Ответ: 465

В-4 Пол квадратного зала выкладывают квадратными плитками одинакового размера белого и серого цвета таким образом, как показано на рисунке: угловая плитка серая, затем три белые, затем пять серых, затем семь белых, и т. д. Чтобы таким образом выложить плиткой весь пол зала, белых плиток потребовалось на 61 меньше, чем серых, причём резать плитки не пришлось. Сколько серых плиток потребовалось?



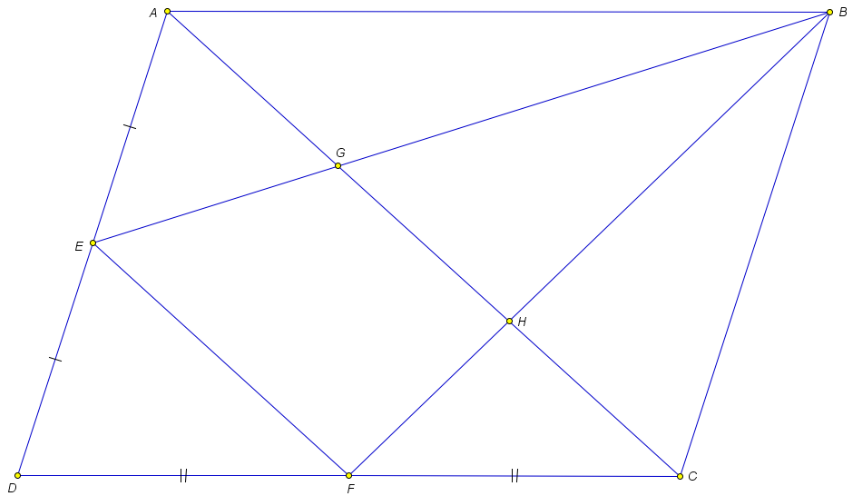
Ответ: 1891

Задача 7 (20 баллов)

В-1 В параллелограмме $ABCD$ точки E и F — середины сторон AD и CD соответственно. Пусть G и H — точки пересечения отрезков BE и BF соответственно с диагональю AC параллелограмма. Найдите площадь четырёхугольника $GHFE$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 24.

Ответ: 5.

Решение. Заметим, что $S_{GHFE} = S_{EBF} - S_{GBH}$, $S_{EBF} = S_{ABCD} - S_{AEB} - S_{EDF} - S_{BFC}$, $S_{AEB} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$ (так как в треугольнике AEB сторона AE в 2 раза меньше стороны параллелограмма AD, а в формуле для площади треугольника есть ещё множитель $\frac{1}{2}$). Аналогично, $S_{BFC} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$, $S_{EDF} = \frac{1}{4}S_{ADC} = \frac{1}{8}S_{ABCD}$ (так как треугольники EDF и ADC подобны и их площади относятся как квадрат коэффициента подобия, а площадь треугольника ADC равна половине площади параллелограмма). Следовательно, $S_{EBF} = S_{ABCD} - \frac{1}{4}S_{ABCD} - \frac{1}{4}S_{ABCD} - \frac{1}{8}S_{ABCD} = \frac{3}{8}S_{ABCD} = 9$.



Треугольники AEG и BGC подобны, поэтому $\frac{AG}{GC} = \frac{1}{2}$, т. е. $2AG = GH + HC$. Аналогично, из подобия треугольников FHC и AHB получаем, что $2HC = AG + GH$. Вычитая одно из этих равенств из другого, получаем $AG = GH = HC$. Значит, $S_{GBH} = \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{6}S_{ABCD} = 4$.

Таким образом, искомая площадь равна $S_{GHFE} = 9 - 4 = 5$.

В-2 В параллелограмме $ABCD$ точки E и F — середины сторон AD и CD соответственно. Пусть G и H — точки пересечения отрезков BE и BF соответственно с диагональю AC параллелограмма. Найдите площадь четырёхугольника $GHFE$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 48.

Ответ: 10.

В-3 В параллелограмме $ABCD$ точки E и F — середины сторон AD и CD соответственно. Пусть G и H — точки пересечения отрезков BE и BF соответственно с диагональю AC параллелограмма. Найдите площадь четырёхугольника $GHFE$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 12.

Ответ: 2.5.

В-4 В параллелограмме $ABCD$ точки E и F — середины сторон AD и CD соответственно. Пусть G и H — точки пересечения отрезков BE и BF соответственно с диагональю AC параллелограмма. Найдите площадь четырёхугольника $GHFE$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 36.

Ответ: 7.5.