

**Задача 1.**

**В-1** Вычислите

$$\left[ \sqrt{45 - \sqrt{2023}} - \sqrt{45 + \sqrt{2023}} \right],$$

где  $[t]$  — это целая часть числа  $t$  (т.е. наибольшее целое число, не превосходящее  $t$ ).

**Ответ:** -10

**Решение.** Обозначим

$$t = \sqrt{45 - \sqrt{2023}} - \sqrt{45 + \sqrt{2023}}.$$

Так как  $t^2 = 90 - 2\sqrt{45^2 - 2023} = 90 - 2\sqrt{2025 - 2023} = 90 - 2\sqrt{2}$ , и при этом  $t < 0$ , значит  $t = -\sqrt{90 - 2\sqrt{2}}$ . Поскольку  $81 < 90 - 2\sqrt{2} < 100$ , то  $-10 < t < -9$ , и  $[t] = -10$ .

---

**В-2** Вычислите

$$\left[ \sqrt{45 + \sqrt{2022}} - \sqrt{45 - \sqrt{2022}} \right],$$

где  $[t]$  — это целая часть числа  $t$  (т.е. наибольшее целое число, не превосходящее  $t$ ).

**Ответ:** 9

---

**В-3** Вычислите

$$\left[ \sqrt{45 + \sqrt{2023}} - \sqrt{45 - \sqrt{2023}} \right],$$

где  $[t]$  — это целая часть числа  $t$  (т.е. наибольшее целое число, не превосходящее  $t$ ).

**Ответ:** 9

---

**В-4** Вычислите

$$\left[ \sqrt{45 - \sqrt{2022}} - \sqrt{45 + \sqrt{2022}} \right],$$

где  $[t]$  — это целая часть числа  $t$  (т.е. наибольшее целое число, не превосходящее  $t$ ).

**Ответ:** -10

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
**Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике**

Заключительный этап 2022/2023 учебного года для 11 класса

**Задача 2.**

**В-1** При каком наименьшем по модулю значении параметра  $\alpha$  уравнение

$$1234 \sin^{20} \left( x - \frac{\pi}{3} \right) - 789 \cos^{23} \left( \alpha x - \frac{\pi}{4} \right) = 2023$$

имеет решение на отрезке  $[-\pi; \pi]$ ?

**Ответ:**  $-0,9$

**Решение.** Так как синус и косинус по модулю не превосходят 1, а  $1234 + 789 = 2023$ , решением уравнения может быть только такой  $x$ , при котором входящие в уравнение синус и косинус равны соответственно  $\pm 1$  (при возведении в 20-ю степень даст 1) и  $-1$  (таким же останется при возведении в 23-ю степень). Отсюда находятся последовательности возможных значений для  $x$  и для  $\alpha x$  (см. таблицу ниже для различных вариантов).

Эти значения включают в себя целочисленные параметры  $k$  и  $n$ , причем условие  $-\pi \leq x \leq \pi$  приводит к ограничению на возможные целые значения параметра  $k$ . Для всех вариантов оказывается, что  $k$  может быть равным либо  $-1$ , либо  $0$ .

Чтобы полученные для  $\alpha x$  и  $x$  значения могли достигаться при одном и том же  $x$ , надо, чтобы их отношение совпадало с  $\alpha$ . Таким образом, наше уравнение имеет решение на отрезке  $[-\pi; \pi]$ , когда  $\alpha$  представимо в виде дроби из таблицы, в которой  $k$  равно  $-1$  или  $0$ , а  $n$  — любое целое число.

	$\sin^{20}$	$\cos^{23}$	$x$	$\alpha x$	$\alpha$	$\min  \alpha $ при $\alpha = \dots$
В-1	$\left( x - \frac{\pi}{3} \right)$	$\left( \alpha x - \frac{\pi}{4} \right)$	$\frac{5\pi}{6} + \pi k$	$\frac{5\pi}{4} + 2\pi n$	$\frac{15 + 24n}{10 + 12k}$	$\frac{-9}{10} = -0,9$
В-2	$\left( x - \frac{\pi}{6} \right)$	$\left( \alpha x - \frac{\pi}{6} \right)$	$\frac{2\pi}{3} + \pi k$	$\frac{7\pi}{6} + 2\pi n$	$\frac{7 + 12n}{4 + 6k}$	$\frac{-5}{4} = -1,25$
В-3	$\left( x + \frac{\pi}{3} \right)$	$\left( \alpha x + \frac{\pi}{3} \right)$	$\frac{\pi}{6} + \pi k$	$\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$	$\frac{4 + 12n}{1 + 6k}$	$\frac{4}{-5} = -0,8$
В-4	$\left( x + \frac{\pi}{6} \right)$	$\left( \alpha x + \frac{\pi}{4} \right)$	$\frac{\pi}{3} + \pi k$	$\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$	$\frac{9 + 24n}{4 + 12k}$	$\frac{9}{-8} = -1,125$

Чтобы найти такую дробь с наименьшим модулем, выберем  $n$ , минимизирующее модуль числителя, (для приведенных числителей это 0 или  $-1$ ), а также допустимое  $k$ , максимизирующее модуль знаменателя.

**В-2** При каком наименьшем по модулю значении параметра  $\alpha$  уравнение

$$1234 \sin^{20} \left( x - \frac{\pi}{6} \right) - 789 \cos^{23} \left( \alpha x - \frac{\pi}{6} \right) = 2023$$

имеет решение на отрезке  $[-\pi; \pi]$ ?

**Ответ:**  $-1,25$

**В-3** При каком наименьшем по модулю значении параметра  $\alpha$  уравнение

$$1234 \sin^{20} \left( x + \frac{\pi}{3} \right) - 789 \cos^{23} \left( \alpha x + \frac{\pi}{3} \right) = 2023$$

имеет решение на отрезке  $[-\pi; \pi]$ ?

**Ответ:**  $-0,8$

---

**В-4** При каком наименьшем по модулю значении параметра  $\alpha$  уравнение

$$1234 \sin^{20} \left( x + \frac{\pi}{6} \right) - 789 \cos^{23} \left( \alpha x + \frac{\pi}{4} \right) = 2023$$

имеет решение на отрезке  $[-\pi; \pi]$ ?

**Ответ:**  $-1,125$

---

**Задача 3.**

**В-1** Решите уравнение

$$\log_2(|x^2 - 2|^3 + 1) + \sqrt{4x^4 - 3x^2 + 5} = \sqrt{2x^4 + 5x^2 - 3}.$$

**Ответ:**  $\pm\sqrt{2}$

**Решение.** Для существования решения необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$4x^4 - 3x^2 + 5 \leq 2x^4 + 5x^2 - 3 \Leftrightarrow (x^2 - 2)^2 \leq 0,$$

т. е.  $x^2 = 2$ . Проверка показывает, что  $x = \pm\sqrt{2}$  — решение.

---

**В-2** Решите уравнение

$$\log_3(|x^2 - 3|^3 + 1) + \sqrt{4x^4 - 5x^2 + 11} = \sqrt{2x^4 + 7x^2 - 7}.$$

**Ответ:**  $\pm\sqrt{3}$

**Решение.** Для существования решения необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$x^4 - 5x^2 + 11 \leq 2x^4 + 7x^2 - 7 \Leftrightarrow (x^2 - 3)^2 \leq 0,$$

т. е.  $x^2 = 3$ . Проверка показывает, что  $x = \pm\sqrt{3}$  — решение.

---

**В-3**

Решите уравнение

$$\log_5(|x^2 - 5|^3 + 1) + \sqrt{3x^4 - 7x^2 + 19} = \sqrt{2x^4 + 3x^2 - 6}.$$

**Ответ:**  $\pm\sqrt{5}$

**Решение.** Для существования решения необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$3x^4 - 7x^2 + 19 \leq 2x^4 + 3x^2 - 6 \Leftrightarrow (x^2 - 5)^2 \leq 0,$$

т. е.  $x^2 = 5$ . Проверка показывает, что  $x = \pm\sqrt{5}$  — решение.

---

**В-4** Решите уравнение

$$\log_7(|x^2 - 7|^3 + 1) + \sqrt{3x^4 - 9x^2 + 31} = \sqrt{2x^4 + 5x^2 - 18}.$$

**Ответ:**  $\pm\sqrt{7}$

**Решение.** Для существования решения необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$3x^4 - 9x^2 + 31 \leq 2x^4 + 5x^2 - 18 \Leftrightarrow (x^2 - 7)^2 \leq 0,$$

т. е.  $x^2 = 7$ . Проверка показывает, что  $x = \pm\sqrt{7}$  — решение.

### Задача 4.

#### В-1

Две стороны выпуклого четырехугольника имеют длину 6, ещё одна — длину 1, а его площадь — наибольшая возможная при таких условиях. Какова длина четвертой стороны четырехугольника?

**Ответ:** 9

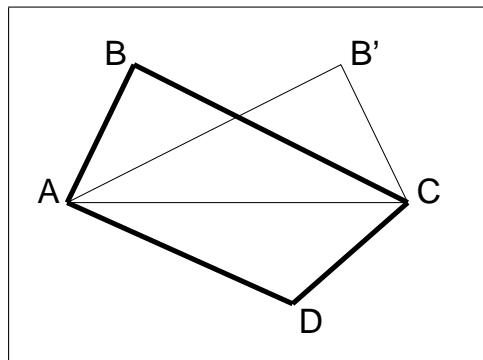
**Решение.**

Пусть известные длины сторон четырехугольника равны  $b, b$  и  $c$ .

В условии не указан порядок расположения этих сторон:  $b, b, c$  или  $b, c, b$ . Но вместо четырехугольника  $ABCD$ , в котором, скажем  $AB = CD = b$ ,  $BC = c$ , рассмотрим четырехугольник  $AB'CD$ , в котором,  $B'C = CD = b$ ,  $AB' = c$ . В нем тот же набор известных длин сторон (но в другом порядке), а площади этих четырехугольников равны, так как это суммы  $S(ABC) + S(ACD)$  и  $S(AB'C) + S(ACD)$ , причем  $\triangle ABC = \triangle AB'C$ .

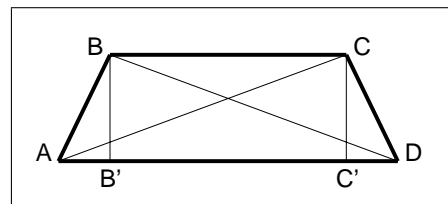
Поэтому можно считать, что  $AB = CD = b$ ,  $BC = c$ .

Заметим, что двигая точку  $D$  по дуге окружности радиуса  $b$  с центром в точке  $C$ , мы будем получать четырехугольник с тем же набором известных длин сторон, с той же частью  $ABC$ , а площадь части  $ACD$  будет наибольшей тогда, когда  $CD \perp AC$  (иначе при том же основании  $AC$  высота из точки  $D$  будет короче, чем  $b$ ). Двигая аналогично точку  $A$  вокруг точки  $B$ , получим, что из свойства максимальной площади четырехугольника  $ABCD$  вытекает  $AB \perp BD$ .



Итак, имеются два прямоугольных треугольника  $ABD$  и  $ACD$  с общей гипотенузой  $AD$  и равными катетами  $AB$  и  $CD$ . Значит, треугольники равны, как и их высоты на гипотенузу, т. е.  $ABCD$  — равнобедренная трапеция с тупыми углами  $B$  и  $C$ .

Пусть  $d = AB' = C'D$ , где  $B'$  и  $C'$  — проекции точек  $B$  и  $C$  на  $AD$ . Тогда из свойства высоты прямоугольного треугольника получаем  $AB' \cdot B'D = B'B^2$ , т. е.  $d(c + d) = b^2 - d^2$  или  $2d^2 + cd - b^2 = 0$ , откуда, с учетом того, что  $d > 0$ ,



$$d = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 8b^2}}{4}, \quad a = AD = c + 2d = \frac{c + \sqrt{c^2 + 8b^2}}{2},$$

Вычисления по вариантам:

	$b$	$c$	$\sqrt{c^2 + 8b^2}$	$a$
В-1	6	1	17	9
В-2	3	7	11	9
В-3	4	14	18	16
В-4	6	14	22	18

#### В-2

Две стороны выпуклого четырехугольника имеют длину 3, ещё одна — длину 7, а его площадь — наибольшая возможная при таких условиях. Какова длина четвертой стороны четырехугольника?

**Ответ:** 9

---

**В-3**

Две стороны выпуклого четырехугольника имеют длину 4, ещё одна — длину 14, а его площадь — наибольшая возможная при таких условиях. Какова длина четвертой стороны четырехугольника?

**Ответ:** 16

---

**В-4**

Две стороны выпуклого четырехугольника имеют длину 6, ещё одна — длину 14, а его площадь — наибольшая возможная при таких условиях. Какова длина четвертой стороны четырехугольника?

**Ответ:** 18

---

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

**Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике**

Заключительный этап 2022/2023 учебного года для 11 класса

---

**Задача 5.**

**В-1** Обозначим через  $s(n)$  число цифр в десятичной записи натурального числа  $n$ . Найдите сумму  $s(2^{2023}) + s(5^{2023})$

**Ответ:** 2024

**Решение.** Заметим, что

$$s(2^{2023}) = \lg(2^{2023}) + a = 2023 \lg 2 + a, \quad \text{где } 0 < a < 1.$$

Аналогично,

$$s(5^{2023}) = \lg(5^{2023}) + b = 2023 \lg 5 + b, \quad \text{где } 0 < b < 1.$$

Тогда

$$s(2^{2023}) + s(5^{2023}) = 2023(\lg 2 + \lg 5) + a + b = 2023 + (a + b).$$

Значит,  $a + b$  целое, причем  $0 < a + b < 2$ , так как  $0 < a < 1$ ,  $0 < b < 1$ . Отсюда  $a + b = 1$ , а ответ равен 2024.

В общем случае —  $s(2^n) + s(5^n) = n + 1$ .

---

**В-2** Обозначим через  $s(n)$  число цифр в десятичной записи натурального числа  $n$ . Найдите сумму  $s(2^{2022}) + s(5^{2022})$

**Ответ:** 2023

---

**В-3** Обозначим через  $s(n)$  число цифр в десятичной записи натурального числа  $n$ . Найдите сумму  $s(2^{2021}) + s(5^{2021})$

**Ответ:** 2022

---

**В-4** Обозначим через  $s(n)$  число цифр в десятичной записи натурального числа  $n$ . Найдите сумму  $s(2^{2020}) + s(5^{2020})$

**Ответ:** 2021

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
**Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике**

Заключительный этап 2022/2023 учебного года для 11 класса

---

**Задача 6.**

**В-1** Дана последовательность  $\{a_n\}$ , в которой  $a_1 = 19$ , а отношение каждого следующего элемента к предыдущему при всех целых  $n \geq 2$  равно

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(n^2 + 1) \cdot n}{(n - 1)^2 + 1}.$$

Найдите отношение 2023-го члена последовательности к сумме её первых 2022 членов.

**Ответ:**  $2024 \frac{1}{1011}$

**Решение.** Найдём  $a_n/a_1$ , перемножив указанное в условии отношение для различных  $n$ :

$$\frac{a_n}{a_1} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} = \frac{(n^2 + 1)n}{(n - 1)^2 + 1} \cdot \frac{((n - 1)^2 + 1)(n - 1)}{(n - 2)^2 + 1} \cdots \frac{(2^2 + 1)2}{1 + 1} = \frac{(n^2 + 1)n!}{2}.$$

Представим его в виде разности:

$$\frac{a_n}{a_1} = \frac{(n^2 + 1)n!}{2} = \frac{1}{2}(n(n + 1) - (n - 1))n! = \frac{n(n + 1)!}{2} - \frac{(n - 1)n!}{2} = b_n - b_{n-1},$$

где

$$b_n = \frac{n(n + 1)!}{2}.$$

Тогда отношение суммы первых  $n$  членов к  $a_1$  равно

$$\frac{S_n}{a_1} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{a_1} = (b_1 - b_0) + (b_2 - b_1) + \cdots + (b_n - b_{n-1}) = b_n - b_0 = \frac{n(n + 1)!}{2}.$$

Стало быть, ответ равен

$$\frac{a_n}{S_{n-1}} = \frac{a_n/a_1}{S_{n-1}/a_1} = \frac{(n^2 + 1)n!}{(n - 1)n!} = \frac{n^2 + 1}{n - 1} = \frac{n^2 - 1 + 2}{n - 1} = n + 1 + \frac{2}{n - 1} = 2024 \frac{1}{1011}.$$

---

**В-2** Дана последовательность  $\{a_n\}$ , в которой  $a_1 = 17$ , а отношение каждого следующего элемента к предыдущему при всех целых  $n \geq 2$  равно

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(n^2 + 1) \cdot n}{(n - 1)^2 + 1}.$$

Найдите отношение 2023-го члена последовательности к сумме её первых 2022 членов.

**Ответ:**  $2024 \frac{1}{1011}$

---

**В-3** Дана последовательность  $\{a_n\}$ , в которой  $a_1 = 13$ , а отношение каждого следующего элемента к предыдущему при всех целых  $n \geq 2$  равно

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(n^2 + 1) \cdot n}{(n - 1)^2 + 1}.$$

Найдите отношение 2022-го члена последовательности к сумме её первых 2021 членов.

**Ответ:**  $2023 \frac{2}{2021}$

---

**В-4** Дана последовательность  $\{a_n\}$ , в которой  $a_1 = 11$ , а отношение каждого следующего элемента к предыдущему при всех целых  $n \geq 2$  равно

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(n^2 + 1) \cdot n}{(n - 1)^2 + 1}.$$

Найдите отношение 2022-го члена последовательности к сумме её первых 2021 членов.

**Ответ:**  $2023 \frac{2}{2021}$



**Задача 7.**

**В-1** На подвешенном в воздухе кубике Рубика, на одном из его 54 квадратиков, сидит жучок. В какой-то момент он начинает движение по поверхности куба, передвигаясь за каждую секунду на соседний квадратик, т. е. на квадратик, имеющий общую сторону с текущим. Соседний квадратик для первого перемещения был выбран произвольно, а затем жучок следовал таким правилам:

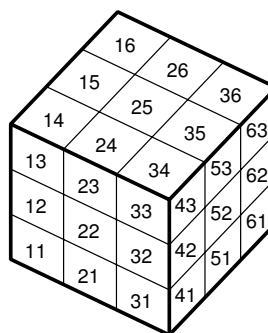
- 1) при 2-м, 4-м и других четных перемещениях жучок не менял направления своего движения, т. е. покидал квадратик через сторону, противоположную той, через которую он на этот квадратик попал;
- 2) при 3-м, 5-м и других нечетных перемещениях жучок поворачивал направо (относительно своего движения).

Через 2023 с после начала движения жучок обратил внимание на то, что уже был на этом же квадратике 5 с назад. Через какое наименьшее число секунд после 2023-й жучок опять окажется на этом квадратике?

**Ответ:** 19

**Решение.** Для отслеживания движения жучка будем использовать частичную развертку куба, покрывающую 3 грани. Каждый квадратик будем обозначать двузначным числом, 1-я и 2-я цифры которого являются соответствующими координатами центра квадратика на развертке (единица — ширина квадратика):

16	26	36			
15	25	35			
14	24	34			
13	23	33	43	53	63
12	22	32	42	52	62
11	21	31	41	51	61



Маршрут жучка определяется его начальным положением и направлением его первого перемещения. Хотя всего таких вариантов  $54 \times 4$ , их все можно разбить на 9 принципиально различных групп:

- 1) жучок стартует с центрального квадратика любой грани по направлению к любому ребру;
- 2–3) старт с углового квадратика любой грани, а первое перемещение в пределах той же грани вдоль ребра, идущего соответственно справа или слева от жучка;
- 4–5) старт с углового квадратика любой грани, а при первом перемещении жучок переползает на соседнюю грань, причем третья примыкающая грань остается соответственно справа или слева от него;
- 6) старт с приреберного квадратика любой грани по направлению к центру;
- 7) старт с приреберного квадратика любой грани с переходом на соседнюю грань при первом перемещении;
- 8–9) старт с приреберного квадратика любой грани, а первое перемещение в пределах той же грани вдоль ребра, идущего соответственно справа или слева от жучка.

Заполним таблицу, в которой для каждой группы приведем пример маршрута в течение того времени, когда обнаруживается его периодичность, т. е. когда на какой-либо четной секунде жучок оказывается на начальном квадратице, а еще через 1 с — на квадратице, где он был через 1 с после начала движения.

В случае группы 1 выберем для старта квадратик 22 с первым перемещением  $22 \rightarrow 23$  и проследим весь маршрут, пока не обнаружим, что его период равен 24 с (1-я колонка таблицы после двойной вертикальной черты).

Заметим, что через 2 с после начала движения жучок окажется в начальном состоянии группы 8. Поэтому для нее маршрут также будет иметь период 24 с и его можно получить из маршрута группы 1 сдвигом на 2 с.

Еще через 2 с жучок окажется в начальном состоянии группы 4. Поэтому и для нее маршрут будет с периодом 24 с и его можно получить из маршрута группы 1 сдвигом на 4 с.

Еще через 2 с имеем начальное состояние группы 7 и получаем ее маршрут с периодом 24 с из маршрута группы 1 сдвигом на 6 с.

Для остальных групп получаются кольцевые маршруты с периодом 8 с, причем в течение одного периода жучок ни на одном квадратице не оказывается дважды.

$T, \text{с}$	Гр. 1	Гр. 2	Гр. 3	Гр. 4	Гр. 5	Гр. 6	Гр. 7	Гр. 8	Гр. 9
0	22	31	31	43	13	21	23	24	12
1	23	32	21	33	14	22	24	34	13
2	24	33	11	23	15	23	25	43	14
3	34	43	12	24	25	33	35	33	24
4	43	53	13	25	35	43	53	23	34
5	33	52	23	35	34	42	43	24	33
6	23	51	33	53	33	41	33	25	32
7	24	41	32	43	23	31	34	35	22
8	25	31	31	33	13	21	35	53	12
9	35	32	21	34	14	22	53	43	13
10	53			35			52	33	
11	43			53			42	34	
12	33			52			32	35	
13	34			42			33	53	
14	35			32			34	52	
15	53			33			43	42	
16	52			34			42	32	
17	42			43			32	33	
18	32			42			22	34	
19	33			32			23	43	
20	34			22			24	42	
21	43			23			34	32	
22	42			24			43	22	
23	32			34			33	23	
24	22			43			23	24	
25	23			33			24	34	

Так как  $2023 \equiv 7 \pmod{24}$  (остаток от деления 2023 на 24 равен 7) и  $2023 \equiv 7 \pmod{8}$  (остаток от деления 2023 на 8 равен 7), то через 2023 с после начала движения жучок окажется на том же квадратице, на котором он был через 7 с после начала, а за 5 с до этого — на том же квадратице, на котором он был через 2 с после начала.

Как видно из таблицы, такое совпадение имеет место только для группы 1 (квадратик 24). Так как этот квадратик встречается на маршруте только дважды в течение периода (2 с и 7 с), следующее попадание на него произойдет через  $2 + 24 - 7 = 19$  (с).

**В-2** На подвешенном в воздухе кубике Рубика, на одном из его 54 квадратиков, сидит жучок. В какой-то момент он начинает движение по поверхности куба, передвигаясь за каждую секунду на соседний квадратик, т. е. на квадратик, имеющий общую сторону с текущим. Соседний квадратик для первого перемещения был выбран произвольно, а затем жучок следовал таким правилам:

- 1) при 2-м, 4-м и других четных перемещениях жучок не менял направления своего движения, т. е. покидал квадратик через сторону, противоположную той, через которую он на этот квадратик попал;
- 2) при 3-м, 5-м и других нечетных перемещениях жучок поворачивал направо (относительно своего движения).

Через 2023 с после начала движения жучок обратил внимание на то, что уже был на этом же квадратике 7 с назад. Через какое наименьшее число секунд после 2023-й жучок опять окажется на этом квадратике?

**Ответ:** 10

**Решение.** Решение то же, что и для В-1, но последнее условие задачи выполняется только для группы 4 (квадратик 43 через 0 с, 7 с и 17 с). Поэтому получается ответ  $17 - 7 = 10$  (с).

---

**В-3** На подвешенном в воздухе кубике Рубика, на одном из его 54 квадратиков, сидит жучок. В какой-то момент он начинает движение по поверхности куба, передвигаясь за каждую секунду на соседний квадратик, т. е. на квадратик, имеющий общую сторону с текущим. Соседний квадратик для первого перемещения был выбран произвольно, а затем жучок следовал таким правилам:

- 1) при 2-м, 4-м и других четных перемещениях жучок не менял направления своего движения, т. е. покидал квадратик через сторону, противоположную той, через которую он на этот квадратик попал;
- 2) при 3-м, 5-м и других нечетных перемещениях жучок поворачивал направо (относительно своего движения).

Через 2023 с после начала движения жучок обратил внимание на то, что уже был на этом же квадратике 10 с назад. Через какое наименьшее число секунд после 2023-й жучок опять окажется на этом квадратике?

**Ответ:** 7

**Решение.** Решение то же, что и для В-1, но последнее условие задачи выполняется только для группы 7 (квадратик 34 через 7 с, 14 с и 21 с) ввиду того, что  $2023 - 10 \equiv 21 \pmod{24}$ . Поэтому получается ответ  $14 - 7 = 7$  (с).

---

**В-4** На подвешенном в воздухе кубике Рубика, на одном из его 54 квадратиков, сидит жучок. В какой-то момент он начинает движение по поверхности куба, передвигаясь за каждую секунду на соседний квадратик, т. е. на квадратик, имеющий общую сторону с текущим. Соседний квадратик для первого перемещения был выбран произвольно, а затем жучок следовал таким правилам:

- 1) при 2-м, 4-м и других четных перемещениях жучок не менял направления своего движения, т. е. покидал квадратик через сторону, противоположную той, через которую он на этот квадратик попал;
- 2) при 3-м, 5-м и других нечетных перемещениях жучок поворачивал направо (относительно своего движения).

Через 2023 с после начала движения жучок обратил внимание на то, что уже был на этом же квадратике 19 с назад. Через какое наименьшее число секунд после 2023-й жучок опять окажется на этом квадратике?

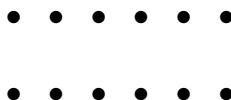
**Ответ:** 5

**Решение.** Решение то же, что и для В-1, но последнее условие задачи выполняется только для группы 8 (квадратик 35 через 7 с и 12 с) ввиду того, что  $2023 - 19 \equiv 12 \pmod{24}$ . Поэтому получается ответ  $12 - 7 = 5$  (с).

---

### Задача 8.

**В-1**



Есть два ряда — верхний и нижний, каждый из 6 точек (см. рисунок). Проводят отрезки с концами в противоположных рядах так, чтобы из каждой точки выходил ровно один отрезок. Сколько существует способов провести отрезки, чтобы среди всех пар отрезков было ровно 7 пар пересекающихся отрезков?

**Ответ:** 101

**Решение.** Пусть в каждом ряду по  $n$  точек. Способ соединить точки можно задать перестановкой  $n$  чисел,  $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ : первая точка верхнего ряда соединяется с точкой под номером  $i_1$ , вторая — с  $i_2$ , и так далее. Значит, всего возможных рисунков будет  $n!$ .

Теперь берём пару отрезков. Пусть это отрезки с концами  $a, i_a$  и  $b, i_b$ , считаем  $a < b$ . В каком случае они пересекаются? В том, когда  $i_a > i_b$ . Учитывая, что  $a, b$  могут быть любой парой, замечаем следующее: общее количество пересечений отрезков равно количеству случаев, когда в перестановке большее число стоит раньше меньшего (не обязательно по соседству). Как сказали бы старшие товарищи, число пересечений равно числу инверсий в перестановке. Так и будем говорить дальше.

Например, 12345 — нет инверсий и нет пересечений, 21345 — одна инверсия (2 и 1), 43152 — 6 инверсий (4 и 3, 4 и 1, 4 и 2, 3 и 1, 3 и 2, 5 и 2). Наибольшее количество инверсий будет, если написать числа задом наперёд: 54321, какие два числа не выбери — большее будет стоять раньше. То есть инверсий в последнем примере 10, а в общем случае —  $C_n^2$ .

Как посчитать число перестановок с заданным количеством инверсий? Подойдём к задаче индуктивно. В фигурных скобках будем указывать различные перестановки, а в квадратных перечислим количества перестановок, имеющих соответственно  $0, 1, \dots, C_n^2$  инверсий.

Итак, единственный элемент можно расположить единственным образом, и у нас есть одна перестановка с нулевым числом инверсий.

$$\{1\}; \quad [1]$$

Добавляем двойку — её можно добавить в начало и в конец имеющейся перестановки  $\{1\}$ . Одна из полученных перестановок будет без инверсий, другая — с одной инверсией.

$$\underbrace{\{12\}}_{0 \text{ инверсий}}, \underbrace{\{21\}}_{1 \text{ инверсия}}; \quad [1, 1]$$

Добавляем тройку — её мы можем поставить в любое место каждой из имеющихся перестановок. Тройка больше всех имевшихся ранее чисел, поэтому если поставить её на последнее место — новых инверсий не добавится, если поставить на предпоследнее (на второе) — добавится одна инверсия, а если на первое — будет плюс две инверсии. Одна перестановка с нулём инверсий, две перестановки с одной, две перестановки с двумя, одна перестановка с тремя. То есть:

$$\underbrace{\{123\}}_{0+0}, \underbrace{\{213\}}_{1+0}, \underbrace{\{132\}}_{0+1}, \underbrace{\{231\}}_{1+1}, \underbrace{\{312\}}_{0+2}, \underbrace{\{321\}}_{1+2}; \quad [1, 2, 2, 1]$$

Так же будет происходить добавление нового числа  $n$  в общем случае: число  $n$  можно поставить на любое место, и в зависимости от места к инверсиям добавится  $+0, +1, +2, \dots, +(n-1)$  штук. То есть на новом шаге перестановка с  $l$  инверсиями превращается в  $n$  перестановок с  $l+0, l+1, l+2, \dots, l+(n-1)$  инверсиями соответственно.

Посмотрим, какие числа получались в квадратных скобках. Напишем эти последовательно-сти одну под другой:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1\ 1 \\ 1\ 2\ 2\ 1 \\ \dots\dots\dots \end{array}$$

Здесь в  $n$ -й строке (нумерация начинается с 1) приводятся числа  $P_n^k$  для  $k = 0, 1, \dots, C_n^k$ , равные количеству перестановок из  $n$  чисел с  $k$  инверсиями.

Вспоминая, как происходит добавление нового  $n$ , получим

$$P_n^k = \underbrace{P_{n-1}^k}_{+0 \text{ инв.}} + \underbrace{P_{n-1}^{k-1}}_{+1 \text{ инв.}} + \underbrace{P_{n-1}^{k-2}}_{+2 \text{ инв.}} + \dots + \underbrace{P_{n-1}^{k-n+1}}_{+(n-1) \text{ инв.}}.$$

Действительно,  $P_{n-1}^k$  — количество перестановок из  $(n-1)$  чисел, в которых уже есть  $k$  инверсий. В них мы вынуждены поставить новое  $n$  на последнее место (+0 инверсий). Раз мы ставим  $n$  на единственно возможное место, количество перестановок не изменится.

Далее,  $P_{n-1}^{k-1}$  — количество перестановок с  $(k-1)$  инверсией, и, чтобы добавить недостающую, мы вынуждены ставить  $n$  на предпоследнее место (+1 инверсия).

Продолжаем так вплоть до  $P_{n-1}^{k-n+1}$ , потому что добавить больше  $(n-1)$  инверсии нельзя. Всего получается  $n$  слагаемых. Из других перестановок предыдущей строки мы ничего нового получить не сможем.

Заметим, что  $P_n^{-k} = 0$ , так как не бывает перестановок с отрицательным числом инверсий, как и не может быть перестановок со слишком большим (больше чем  $C_n^2$ ) количеством инверсий.

Итак, имеем следующий способ построения коллекции  $P_n^k$ .

Первая строчка:

$$\dots 0 \underbrace{00}_{\rightarrow} 0001000000 \dots$$

По строчке ползёт «окно» шириной 2. Попавшие в «окно» числа складываются и выписываются в следующую (2-ю) строку:

$$\dots 0 \underbrace{(0\ 0)}_{=0} 1000 \dots \quad \dots 00 \underbrace{(0\ 1)}_{=1} 000 \dots \quad \dots 000 \underbrace{(1\ 0)}_{=1} 00 \dots \quad \dots 0001 \underbrace{(0\ 0)}_{=0} 0 \dots$$

Вторая строка:

$$\dots 0 \underbrace{000}_{\rightarrow} 0011000000 \dots$$

По ней будет ползти окно шириной 3. Сложение попавших в окно чисел даст третью строку:

$$\dots 0 \underbrace{0000}_{\rightarrow} 122100000 \dots$$

По ней поползёт окно шириной 4, и так далее, чтобы получить  $n$ -ю строку, нужно складывать  $n$  стоящих подряд чисел предыдущей строки.

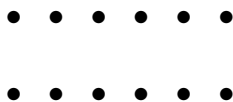
Выпишем (без нулей) первые 6 строк нашей коллекции и выберем в ней нужное нам  $P_6^7$ :

$$\begin{array}{l} 1 \\ 1\ 1 \\ 1\ 2\ 2\ 1 \\ 1\ 3\ 5\ 6\ 5\ 3\ 1 \\ 1\ 4\ 9\ 15\ 20\ 22\ 20\ 15\ 9\ 4\ 1 \\ 1\ 5\ 14\ 29\ 49\ 71\ 90\ \underline{101}\ 101\ 90\ 71\ 49\ 29\ 14\ 5\ 1 \end{array}$$

Заметим, что сумма чисел в каждой строке равна  $n!$  (общее число перестановок).

---

**В-2**

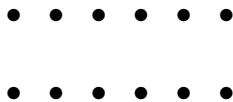


Есть два ряда — верхний и нижний, каждый из 6 точек (см. рисунок). Проводят отрезки с концами в противоположных рядах так, чтобы из каждой точки выходил ровно один отрезок. Сколько существует способов провести отрезки, чтобы среди всех пар отрезков было ровно 8 пар пересекающихся отрезков?

**Ответ:** 101

---

**В-3**

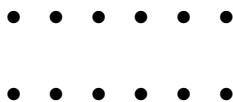


Есть два ряда — верхний и нижний, каждый из 6 точек (см. рисунок). Проводят отрезки с концами в противоположных рядах так, чтобы из каждой точки выходил ровно один отрезок. Сколько существует способов провести отрезки, чтобы среди всех пар отрезков было ровно 9 пар пересекающихся отрезков?

**Ответ:** 90

---

**В-4**



Есть два ряда — верхний и нижний, каждый из 6 точек (см. рисунок). Проводят отрезки с концами в противоположных рядах так, чтобы из каждой точки выходил ровно один отрезок. Сколько существует способов провести отрезки, чтобы среди всех пар отрезков было ровно 6 пар пересекающихся отрезков?

**Ответ:** 90