

Задача 1.

В-1

Некто раздобыл вот такие часы. Чтоб от них был хоть какой-то прок, он отломал все стрелки, кроме часовой, и настроил ход механизма так, чтоб часовая стрелка действительно делала оборот за 11 (общепринятых) часов, как утверждает циферблат. Например, если в полночь они показывали 00:00, то за следующие сутки такие часы успеют сделать два полных оборота, и ещё пройти до двух.



Ночью с 28 февраля на 1 марта, в полночь, этот человек настроил часы на 00:00.

Какую долю времени в марте показания этих часов будут совпадать с показаниями нормальных?

Ответ: 11/124

Решение. За март часовая стрелка нормальных часов делает $31 \cdot 2 = 62$ оборота. Когда показания часов из условия правильные? В том случае, если они начали оборот одновременно с нормальными часами — после такого совпадения 11 часов подряд показания сломанных часов будут правильные. Сколько будет таких совпадений за месяц? Чтоб было такое совпадение, нужно, чтобы некоторое число 11-тичасовых циклов совпало по длительности с некоторым числом 12-тичасовых циклов. Иными словами, решаем уравнение $11 \cdot k = 12 \cdot m$ в целых числах, причём — m меняется от 0 до 61. 11 и 12 взаимно просты, поэтому ответы следующие:

$$(m = 0, k = 0 \text{ (это самый первый день)}); (m = 11, k = 12); (m = 22, k = 24);$$

$$(m = 33, k = 36); (m = 44, k = 48); (m = 55, k = 60).$$

Итого — 6 совпадений, поэтому правильными показаниями мы сможем наслаждаться $11 \cdot 6 = 66$ часов в месяц, а всего в марте $31 \cdot 24 = 744$ часа. Отсюда — ответ, равный

$$\frac{66}{744} = \frac{33}{372} = \frac{11}{124}.$$

Задача 2.

В-1 Есть три одинаковых кубика, грани каждого из которых покрашены в одни и те же 6 цветов одинаковым образом (каждая грань – полностью в один цвет, разные грани одного кубика – в разные цвета, взаимное расположение цветов на гранях всех кубиков одинаково). Ангелина ставит эти кубики друг на друга и получает башню в форме прямоугольного параллелепипеда $1 \times 1 \times 3$ кубика. Сколько разных раскрасок может иметь получившаяся башня? Раскраски считаются одинаковыми, если получаются друг из друга поворотом всей башни вокруг вертикальной оси.

Ответ: 3456

Решение. Есть 6 способов выбрать цвет нижней грани нижнего кубика (этим однозначно определяется расположение цветов на его гранях с точностью до поворота вокруг вертикальной оси). При каждом таком выборе есть по 6 способов выбрать цвет нижней грани среднего кубика и затем по 4 способа повернуть его вокруг вертикальной оси относительно нижнего кубика; аналогично и для верхнего кубика. Итого $6 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4 = 3456$ раскрасок.

Задача 3.

В-1 Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$x^2 - y^2 - 4x - 6y - 58 = 0.$$

Ответ: $(-25; -29), (-25; 23), (29; -29), (29; 23)$.

Решение. Выделим в левой части уравнения полные квадраты по x и по y :

$$x^2 - y^2 - 4x - 6y - 58 = x^2 - 4x + 4 - (y^2 + 6y + 9) - 4 + 9 - 58 = (x - 2)^2 - (y + 3)^2 - 53.$$

Таким образом, исходное уравнение равносильно уравнению $(x - 2)^2 - (y + 3)^2 = 53$, которое с помощью формулы разности квадратов можно переписать в виде $(x - y - 5)(x + y + 1) = 53$.

Число 53 — простое, поэтому в виде произведения двух целых чисел его можно представить только двумя способами: $53 = 1 \cdot 53 = (-1) \cdot (-53)$. Таким образом, возможны четыре случая:

$$\begin{cases} x - y - 5 = -1, \\ x + y + 1 = -53, \end{cases} \quad \begin{cases} x - y - 5 = -53, \\ x + y + 1 = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} x - y - 5 = 53, \\ x + y + 1 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x - y - 5 = 1, \\ x + y + 1 = 53. \end{cases}$$

Решая каждую из этих систем, получим соответствующие целочисленные решения:
 $(-25; -29), (-25; 23), (29; -29), (29; 23)$.

Задача 4.

В-1

В бескрайних калмыцких степях мама отправила маленькую дочку навестить бабушку. У девочки не было ни навигатора, ни компаса, а только часы, которыми она еще не умела пользоваться, но у которых был ежечасный звуковой сигнал. Зная обычную скорость их любимого верблюда, мама рассчитала маршрут для дочки. Отправляя ее в путь при звуковом сигнале часов в направлении, соответствующем положению солнца в этот момент, велела через час (по очередному сигналу часов) изменить направление движения в соответствии с новым положением солнца. Так в конце концов девочка и доехала бы до бабушки. Но, когда пришло время менять направление, девочка заметила далеко впереди юрту своей подружки, она продолжила движение, не меняя направления, доехала до подружки и проговорила с ней 21 минуту, пока не прозвучал следующий сигнал часов. Тогда она вспомнила наставление матери и продолжила путь в направлении, соответствующем новому положению солнца. Как ни странно, до бабушки она доехала. Сколько всего времени (в минутах) она на это потратила?

Ответ: 159

Решение.

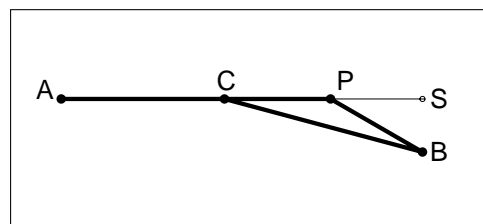
Пусть девочка выехала из точки A в направлении на солнце (S), должна была повернуть в точке C , а юрты подружки и бабушки находятся в точках P и B . Так как солнце за сутки совершает видимый оборот в 360° , то за час направление на солнце меняется на $360^\circ : 24 = 15^\circ$, а за два часа — на 30° , т. е. $\angle BCS = 15^\circ$, $\angle BPS = 30^\circ$.

Из свойства внешнего угла треугольника вытекает, что $\angle CBP = \angle BPS - \angle BCS = 15^\circ$, так что $\triangle CPB$ — равнобедренный и $BP = CP$.

Таким образом, чтобы добраться до бабушки, девочка затратила:

- 1) 1 час на путь AC до нужной точки поворота;
- 2) $60 - 21 = 39$ минут на путь CP до юрты подружки;
- 3) 21 минуту на беседу в точке P ;
- 4) 39 минут на путь PB до бабушки.

Итого, у нее ушло $60 + 39 + 21 + 39 = 159$ минут.



Задача 5.

В-1 На подвешенном в воздухе кубике Рубика, на центральном квадратике одной из его граней, сидит жучок. В какой-то момент он начинает движение по поверхности куба, передвигаясь за каждую секунду на соседний квадратик, т. е. на квадратик, имеющий общую сторону с текущим. Соседний квадратик для первого перемещения был выбран произвольно, а затем жучок следовал таким правилам:

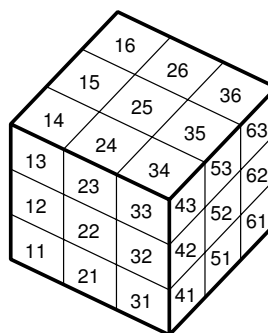
- 1) При 2-м, 4-м и других четных перемещениях жучок не менял направления своего движения, т. е. покидал квадратик через сторону, противоположную той, через которую он на этот квадратик попал;
- 2) При 3-м, 5-м и других нечетных перемещениях жучок поворачивал направо (относительно своего движения).

Завершил жучок свое движение через 2023 с после его начала. Через сколько секунд после начала движения жучок впервые оказался на том квадратике, на котором он в конце остановился?

Ответ: 2 с

Решение. Для отслеживания движения жучка будем использовать частичную развертку куба, покрывающую 3 грани. Каждый квадратик будем обозначать двузначным числом, 1-я и 2-я цифры которого являются соответствующими координатами центра квадратика на развертке (единица — ширина квадратика):

16	26	36			
15	25	35			
14	24	34			
13	23	33	43	53	63
12	22	32	42	52	62
11	21	31	41	51	61



Взяв в качестве отправного квадратик 22, а в качестве первого перемещения — $22 \rightarrow 23$, запишем маршрут за первые 29 с:

Время (с)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Квадратик	22	23	24	34	43	33	23	24	25	35	53	43	33	34	35
Время (с)	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
Квадратик	53	52	42	32	33	34	43	42	32	22	23	24	34	43	33

Как видим, через 24 с жучок окажется в исходной точке, будет двигаться в том же направлении (на квадратик 23), причем четность 0 и 24 совпадают. Поэтому дальнейшее движение жучка будет периодически повторять движение первых 24 с. Так как $2023 \equiv 7 \pmod{24}$ (остаток от деления 2023 на 24 равен 7), то через 2023 с жучок окажется на том же квадратике, на котором он был через 7 с после начала движения, т. е. на квадратике 24. Как следует из таблицы, впервые на этом квадратике жучок оказался через 2 с после начала движения.

Задача 6.

В-1

До XVIII века на Руси числа обозначались с помощью букв. Давайте перечислим те из них, которые дожили до наших дней:

$$\bar{a} = 1, \bar{b} = 2, \bar{r} = 3, \bar{d} = 4, \bar{e} = 5, \bar{i} = 8;$$

$$\bar{k} = 20, \bar{l} = 30, \bar{m} = 40, \bar{n} = 50, \bar{o} = 70, \bar{p} = 80, \bar{c} = 90;$$

$$\bar{p} = 100, \bar{c} = 200, \bar{t} = 300, \bar{y} = 400, \bar{f} = 500, \bar{x} = 600, \bar{ц} = 900.$$

С помощью букв числа записываются так: например, $\bar{цла} = \bar{ц} + \bar{l} + \bar{a} = 900 + 30 + 1 = 931$. Или $\bar{мд} = 44$. Или $\bar{ра} = 101$.

Однако не каждый набор букв обозначает число. Буквы распределены по строкам — «единицы», «десятки» и «сотни». В числе может быть только по одной букве из каждой строки, и располагаться буквы должны по убыванию своих значений. Скажем, записи $\bar{да}$, $\bar{чух}$, $\bar{или}$, $\bar{ал}$, \bar{oooo} запрещены.

Найдите два решения ребуса в современных буквах

$$(\overline{**} + \overline{*} \times \overline{***}) \times \overline{*} = \overline{*},$$

если: буквы не повторяются; умножения на единицу не происходит; в ответе ровно две гласных буквы.

Ответ: $(78 + 3 \times 124) \times 2 = 900$ (старомодно: $(\bar{oi} + \bar{r} \times \bar{ркд}) \times \bar{b} = \bar{ц}.$)
и $(58 + 2 \times 121) \times 3 = 900$ (старомодно: $(\bar{ni} + \bar{b} \times \bar{рка}) \times \bar{r} = \bar{ц}.$)

Решение. Сначала нужно понять отличие этой системы от десятичной — по количеству цифр в десятичной записи можно приблизительно определить величину числа. По количеству букв о величине числа судить сложнее. Скажем, число из одной цифры обязательно меньше десяти, а вот число из одной буквы вполне может быть и 5, и 50, и даже 500. Однако — в скобке находится число из трёх букв. Вот оно обязано содержать по букве из каждой строки (потому что иначе мы три буквы по правилам просто не наберём), и поэтому оно заведомо больше ста. Более того — это число на что-то умножается, и это, по условию, не умножение на единицу — значит, в скобках у нас число, большее чем 200. Скобку мы, в свою очередь, тоже на что-то умножаем, и не на единицу — значит, левая часть заведомо больше 400. Больше того, если вспомнить, что буквам запрещено повторяться, получим следующий вывод — число, большее ста, умножается на одно и на другое однозначное число. Самый «экономный» вариант для этой пары — это 2 и 3. То есть левая часть равенства как минимум больше 600.

И равно это всё правой части — числу из одной буквы. Какие есть варианты? Только один: 900 (ц). А другие однобуквенные числа — это 2 и 3, или 2 и 4, в каком-то порядке. Все другие варианты сразу дают слишком большие числа.

Сначала: 2 и 3. Итак, $(\overline{**} + 3 \times \overline{***}) \times 2 = 900$, вместе с ним другой вариант: $(\overline{**} + 2 \times \overline{***}) \times 3 = 900$. Сразу узнаём первую букву трёхзначного числа — это (р), то есть 100. Любая другая буква даст слишком большое произведение. $(\overline{**} + 3 \times \overline{р**}) \times 2 = 900$ вместе с $(\overline{**} + 2 \times \overline{р**}) \times 3 = 900$. Поделим: $\overline{**} + 3 \times \overline{р**} = 450$ вместе с $\overline{**} + 2 \times \overline{р**} = 300$. Вынесем наружу Р, сотню, это будет $\overline{**} + 300 + 3 \times \overline{**} = 450$ вместе с $\overline{**} + 200 + 2 \times \overline{**} = 300$. Ну то есть, наконец:

$$\overline{**} + 3 \times \overline{**} = 150,$$

$$\overline{**} + 2 \times \overline{**} = 100.$$

Второе слагаемое в каждом случае состоит из десятков и единиц (потому что оно отделено от трёхзначного числа), а вот первое, в принципе, не обязано состоять из десятков и единиц. Впрочем, очевидно, что вариант «сотни плюс десятки» слишком большой (больше 200). Так что оба числа — «десятки и единицы»

На роль последних цифр (букв) у нас остаются только 1,4,5,8 (ведь 2 и 3 уже заняты). Нужно выбрать цифры так, чтобы одна, плюс удвоенная (или утроенная) другая давали число, кратное 10. Вариантов три: $8 + 2 \cdot 1 = 10$, $8 + 3 \cdot 4 = 20$, $4 + 2 \cdot 8 = 20$.

Остаётся для каждого из случаев перебрать возможные буквы для десятков. В первом случае уже есть две гласные (А=1 и И=8), поэтому перебор десятков идёт среди согласных букв. Во втором случае гласная одна (И=8), поэтому среди десятков обязана быть буква О, единственная гласная из второго ряда. В третьем случае мы пока не набрали никаких гласных, поэтому обе гласных должны найтись среди десятков, но так как среди десятков гласная всего одна, О, ничего мы найти не сможем, третий вариант отбрасываем.

Перебор оставит нас с **двумя ответами**: $(78 + 3 \times 124) \times 2 = 900$ (старомодно: $(\overline{oi} + \overline{r} \times \overline{pka}) \times \overline{v} = \overline{p}$), или $(58 + 2 \times 121) \times 3 = 900$ (старомодно: $(\overline{ni} + \overline{v} \times \overline{pka}) \times \overline{r} = \overline{p}$).

Теперь вернёмся к случаю, когда однобуквенные числа равны 2 и 4. Там тоже первая буква трёхзначного числа равна Р, и, когда мы так же раскроем скобки, получатся такие варианты:

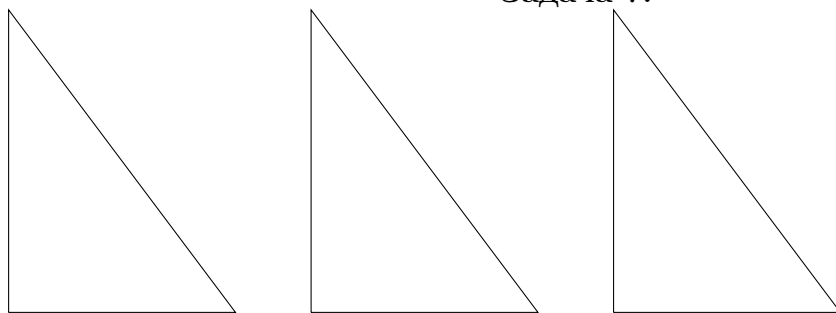
$$\overline{**} + 2 \times \overline{**} = 25, \quad \overline{**} + 4 \times \overline{**} = 50.$$

Оба этих варианта невозможны: буквы для десятков (20,30 и т.д.) слишком велики, чтобы дать такие маленькие суммы.

От участника настолько подробное решение не требуется: задание просит «найти» решения, без доказательства того, что остальных нет.

Задача 7.

В-1



На плоскости есть три одинаковых прямоугольных треугольника со сторонами 3, 4, 5. Они одинаково ориентированы, их можно двигать и вращать, но нельзя накладывать друг на друга (касаться сторонами можно) и нельзя класть обратной стороной вверх (то есть, как бы вы ни двигали треугольник, стороны 3 - 4 - 5 будут расположены по ходу часовой стрелки).

Посчитайте, сколько различных «жестких» фигур можно собрать, используя все эти треугольники. Фигура считается «жесткой», если у каждого её треугольника есть с каким-нибудь другим треугольником общая вершина и общий граничный отрезок с концом в этой вершине (необязательно целая сторона).

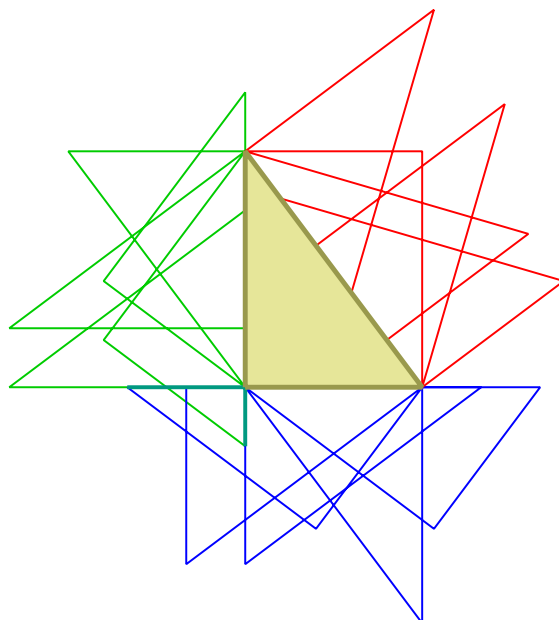
Ответ: 73

Решение. Треугольники могут крепиться друг к другу так: либо каждый прикреплён к каждому (получается этакое кольцо), либо же к одному из треугольников (назовём его центральным) «жестко» прикреплены два остальных (назовём их соседями). Рассмотрим сначала второй случай.

Берём один из треугольников, он будет выполнять роль центрального. «Жестко» прикрепить два других треугольника к одной и той же его стороне нельзя без существенного наложения треугольников (это было бы возможно, если бы одна из сторон была по крайней мере в 2 раза короче другой). Значит, для крепежа надо выбрать пару сторон центрального треугольника. Это можно сделать тремя способами (3,4 или 3,5 или 4,5). К каждой из выбранных сторон центрального треугольника другой треугольник можно «жестко» прикрепить 5 способами ($1+2+2$: 1 способ для крепления со стороной такой же длины, а для каждой из двух других сторон соседнего треугольника есть два способа, так как в этом случае есть выбор, какую из двух вершин делать общей). На рисунке разными цветами для разных сторон центрального треугольника показано по 5 способов крепления соседа.

Итак, есть 3 способа выбрать пару сторон центрального треугольника, а для каждой из выбранных сторон — по 5 способов прикрепить соседа. Всего получается $3 \times 5 \times 5 = 75$ способов.

Осталось выбросить те из них, у которых имеется существенное наложение треугольников. Из рисунка видно, что отбраковываются 2 способа, в каждом из которых участвует зелёный сосед, крепящийся гипотенузой к длинному катету центрального треугольника с самым острым углом при общей вершине. Он накладывается на синего соседа, крепящегося гипотенузой к короткому катету с не самым острым углом при общей вершине, а также на синего соседа, крепящегося своим длинным катетом к короткому катету центрального треугольника с разными острыми углами при общей вершине. Таким образом, для случая «центр и два со-



седа» имеется $75 - 2 = 73$ способа составить «жесткую» фигуру.

Что касается «кольцевого» случая, то из того же рисунка видно, что он невозможен: хотя и есть варианты, когда каждая пара составляющих фигуру треугольников имеет общий граничный отрезок, одной из таких пар (зелёно-синей) не хватает общей вершины.
