

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2022/23 учебного года для 11 класса

Задача 1.

В-1 В магазине продают три вида ручек: по 14 рублей, по 15 рублей и по 16 рублей. Вася купил ручек ровно на 170 рублей. Сколькими способами это можно было сделать?

Ответ: 6

Решение. Пусть Вася купил k ручек по 14 рублей, l ручек по 15 рублей и m ручек по 16 рублей. Тогда $14k + 15l + 16m = 170$; для ответа на вопрос задачи нужно найти количество решений этого уравнения в неотрицательных целых числах. Перейдя в уравнении к остаткам от деления на 15, получим, что $m = k + 5 + 15s$, где s — некоторое целое число. Подставив это выражение в исходное уравнение и поделив обе его части на 15, получим $2k + l + 16s = 6$. Так как $2k + l \geq 0$, то $s \leq 0$; если $s \leq -2$, то $2k + l \geq 6 + 32 = 38$ и $170 = 14k + 15l + 16m \geq 14k + 7l \geq 7 \cdot 38 > 170$ — противоречие, следовательно, $s = 0$ или $s = -1$. При $s = 0$ получаем $k = 0$ и $l = 6$, $k = 1$ и $l = 4$, $k = 2$ и $l = 2$, $k = 3$ и $l = 0$, при этом $m = k + 5$ равно 5, 6, 7, 8 соответственно. При $s = -1$ имеем $m = k + 5 - 15 = k - 10 \geq 0$, значит, $2k \geq 20$ и $22 = 2k + 0 = 20 + 2$, получаем $k = 11$ и $l = 0$, $k = 10$ и $l = 2$, при этом m равно 1 и 0 соответственно. Итого 6 вариантов.

В-2 В магазине продают три вида ручек: по 15 рублей, по 16 рублей и по 17 рублей. Вася купил ручек ровно на 180 рублей. Сколькими способами это можно было сделать?

Ответ: 5

В-3 В магазине продают три вида ручек: по 16 рублей, по 17 рублей и по 18 рублей. Вася купил ручек ровно на 193 рубля. Сколькими способами это можно было сделать?

Ответ: 4

В-4 В магазине продают три вида ручек: по 13 рублей, по 14 рублей и по 15 рублей. Вася купил ручек ровно на 160 рублей. Сколькими способами это можно было сделать?

Ответ: 6

В-5 Сколько существует четырёхзначных натуральных чисел, сумма цифр каждого из которых не превосходит 7?

Ответ: 210

Решение. Решение. Если \overline{abcd} — четырёхзначное число, удовлетворяющее условию, то $a + b + c + d \leq 7$, где $a \geq 1$, $b, c, d \geq 0$. Поэтому искомое число равно количеству решений неравенства $a' + b + c + d \leq 6$ в неотрицательных целых числах a', b, c, d . В свою очередь количество этих решений равно суммарному количеству решений в неотрицательных целых числах уравнений вида $a' + b + c + d = k$, где $k = 0, 1, 2, \dots, 6$. При фиксированном k число этих решений равно числу способов расставить в ряду из k шариков три перегородки (число шариков перед первой перегородкой, между соседними перегородками, после последней перегородки равно очередному слагаемому; можно ставить несколько перегородок подряд, а также в начале или конце ряда шариков — это соответствует нулевым слагаемым), то есть из $k + 3$ мест для шариков и перегородок выбрать 3 места для перегородок; сделать это есть $C_{k+3}^3 = \frac{(k+3)(k+2)(k+1)}{6}$ способов. Всего имеем $C_{0+3}^3 + C_{1+3}^3 + \dots + C_{6+3}^3 = 210$ решений.

В-6 Сколько существует четырёхзначных натуральных чисел, сумма цифр каждого из которых не превосходит 8?

Ответ: 330

В-7 Сколько существует четырёхзначных натуральных чисел, сумма цифр каждого из которых не превосходит 9?

Ответ: 495

В-8 Сколько существует четырёхзначных натуральных чисел, сумма цифр каждого из которых не превосходит 10?

Ответ: 715

Задача 2.

В-1 Даны два натуральных числа. Большее из них равно квадрату их разности, а меньшее из них в 8 раз больше их наибольшего общего делителя. Найдите наименьшее общее кратное этих двух чисел.

Ответ: 648

Решение. Пусть даны числа $x \leq y$. По условию $y = (y - x)^2$, откуда $y = n^2$ и $x = n^2 - n$, где n — некоторое натуральное число. Поскольку $\text{НОД}(n^2, n^2 - n) = \text{НОД}(n^2, n) = n$, из второго условия задачи получим $x = 8n \Rightarrow n^2 - n = 8n \Rightarrow n = 9$. Значит, $x = 72, y = 81$, $\text{НОК}(72, 81) = 648$.

В-2

Даны два натуральных числа. Большее из них равно квадрату их разности, а меньшее из них в 7 раз больше их наибольшего общего делителя. Найдите наименьшее общее кратное этих двух чисел.

Ответ: 448

В-3

Даны два натуральных числа. Большее из них равно квадрату их разности, а меньшее из них в 6 раз больше их наибольшего общего делителя. Найдите наименьшее общее кратное этих двух чисел.

Ответ: 294

В-4 Даны два натуральных числа. Большее из них равно квадрату их разности, а меньшее из них в 9 раз больше их наибольшего общего делителя. Найдите наименьшее общее кратное этих двух чисел.

Ответ: 900

Задача 3.

В-1 Найти площадь выпуклого многоугольника, координаты вершин которого суть решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 9 - 2xy. \end{cases}$$

Ответ: 6

Решение. Левая часть первого уравнения раскладывается на множители:

$$(2x - y)(x - 2y) = 0.$$

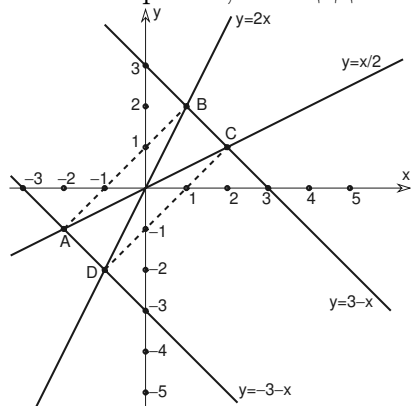
Во втором уравнении после переноса всех слагаемых в левую часть также можно разложить левую часть на множители:

$$x^2 + y^2 = 9 - 2xy \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 9 \Rightarrow (x + y)^2 = 3^2 \Rightarrow (x + y - 3)(x + y + 3) = 0$$

Таким образом, решениями системы будут координаты точек A, B, C, D пересечения графиков соответствующих линейных функций (см. рисунок). Четырёхугольник $ABCD$ — прямоугольник, так как его стороны лежат на взаимно перпендикулярных прямых. Длины сторон легко определяются по теореме Пифагора:

$$AD = BC = \sqrt{2}, \quad AB = CD = 3\sqrt{2}.$$

Таким образом, площадь четырёхугольника равна $S_{ABCD} = \sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 6$.



В-2 Найти площадь выпуклого многоугольника, координаты вершин которого суть решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x^2 - 26xy + 5y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 9 - 2xy. \end{cases}$$

Ответ: 12

В-3 Найти площадь выпуклого многоугольника, координаты вершин которого суть решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 4x^2 - 17xy + 4y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 25 - 2xy. \end{cases}$$

Ответ: 30

В-4 Найти площадь выпуклого многоугольника, координаты вершин которого суть решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 3x^2 - 10xy + 3y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 4 - 2xy. \end{cases}$$

Ответ: 4

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2022/23 учебного года для 11 класса

Задача 4.

В-1 Четыре купца Арсений, Богдан, Вакула и Гаврила получили из казны 50 золотых червонцев. Они их решили разделить так, чтобы каждому досталось нечётное количество червонцев. Сколько есть разных способов дележа?

Ответ: 2600

Решение. Ответ на вопрос задачи равен количеству решений уравнения $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 50$ в положительных нечётных числах.

Пусть $x_i = 2y_i - 1$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Тогда все y_i — натуральные числа, и уравнение приобретает вид $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 27$. Количество решений этого уравнения в натуральных числах равно числу способов расставить в ряду из 27 шариков 3 перегородки (перегородки можно ставить только между двумя шариками, нельзя ставить две перегородки рядом): число y_1 будет равно количеству шариков левее первой перегородки, y_2 — между первой и второй, y_3 — между второй и третьей, y_4 — правее третьей перегородки. А число способов расстановки перегородок равно $C_{26}^3 = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24}{2 \cdot 3} = 2600$.

В-2 Четыре купца Арсений, Богдан, Вакула и Гаврила получили из казны 52 золотых червонца. Они их решили разделить так, чтобы каждому досталось нечётное количество червонцев. Сколько есть разных способов дележа?

Ответ: 2925

В-3 Четыре купца Арсений, Богдан, Вакула и Гаврила получили из казны 54 золотых червонца. Они их решили разделить так, чтобы каждому досталось нечётное количество червонцев. Сколько есть разных способов дележа?

Ответ: 3276

В-4 Четыре купца Арсений, Богдан, Вакула и Гаврила получили из казны 56 золотых червонцев. Они их решили разделить так, чтобы каждому досталось нечётное количество червонцев. Сколько есть разных способов дележа?

Ответ: 3654

В-5 Шайка пиратов нашла клад в 15000 золотых монет. Они договорились, что некоторые из них получают по 48 монет, а остальные — по 49 монет. Клад удалось поделить без остатка. Какое наименьшее число пиратов может получить по 49 монет?

Ответ: 24

Решение. Пусть x пиратов получили по 48 монет, а y — по 49. Тогда

$$\begin{aligned}48x + 49y &= 15000, \\(50 - 2)x + (50 - 1)y &= 15000, \\50(x + y) - 2x - y &= 15000, \\(x + y) - \frac{2x + y}{50} &= 300.\end{aligned}$$

Таким образом, число $2x + y$ нацело делится на 50. Пусть $2x + y = 50k$, где k — некоторое натуральное число. Тогда

$$\begin{cases} 2x + y = 50k, \\ x + y = 300 + k. \end{cases}$$

Если вычесть из первого уравнения второе, а из удвоенного второго — первое, получим

$$\begin{cases} x = 49k - 300, \\ y = 600 - 48k. \end{cases}$$

Таким образом, каждому натуральному k соответствуют единственно возможные значения x и y . Число x будет неотрицательным при $k \geq 7$, а число y — при $k \leq 12$. Значит, $k \in [7; 12]$. При $k = 7$ получаем наименьшее значение $x = 43$ и наибольшее значение $y = 264$, а при $k = 12$ — наоборот, наибольшее значение $x = 288$ и наименьшее значение $y = 24$.

В-6 Шайка пиратов нашла клад в 15000 золотых монет. Они договорились, что некоторые из них получают по 48 монет, а остальные — по 49 монет. Клад удалось поделить без остатка. Какое наименьшее число пиратов может получить по 48 монет?

Ответ: 43

В-7 Шайка пиратов нашла клад в 15000 золотых монет. Они договорились, что некоторые из них получают по 48 монет, а остальные — по 49 монет. Клад удалось поделить без остатка. Какое наибольшее число пиратов может получить по 49 монет?

Ответ: 264

В-8 Шайка пиратов нашла клад в 15000 золотых монет. Они договорились, что некоторые из них получают по 48 монет, а остальные — по 49 монет. Клад удалось поделить без остатка. Какое наибольшее число пиратов может получить по 48 монет?

Ответ: 288

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2022/23 учебного года для 11 класса

Задача 5.

В-1 Сколько целочисленных решений у уравнения

$$x^2 + (y^2 - 2022^2)^2 = \sin(2023(x^3 - 1)) + 1?$$

Ответ: 2

Решение. При подстановке в уравнение целочисленного решения левая часть уравнения принимает целочисленное значение. Значит, правая часть тоже принимает целочисленное значение, то есть синус может принимать значения $-1, 0, 1$. Синус не может принимать значения $1, -1$ на целочисленном аргументе, поэтому он принимает значение 0 , откуда с учётом целочисленности x получаем, что $2023(x^3 - 1) = 0$ и $x = 1$. Отсюда находим, что $y = \pm 2022$, то есть уравнение имеет два целочисленных решения.

В-2 Сколько целочисленных решений у уравнения

$$x^2 + (y^2 - 2023^2)^2 = \sin(2024(x^3 - 1)) + 1?$$

Ответ: 2

В-3 Сколько целочисленных решений у уравнения

$$x^2 + (y^2 - 2024^2)^2 = \sin(2025(x^3 - 1)) + 1?$$

Ответ: 2

В-4 Сколько целочисленных решений у уравнения

$$x^2 + (y^2 - 2025^2)^2 = \sin(2026(x^3 - 1)) + 1?$$

Ответ: 2

В-5 Три различных корня уравнения $8x^3 - 12x^2 - 2x + a = 0$ составляют арифметическую прогрессию. Найдите наибольший из корней, ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ: 1.5

Решение. Пусть $x_1 < x_2 < x_3$ — корни уравнения. Так как они образуют арифметическую прогрессию, то $x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}$, поэтому $x_1 + x_2 + x_3 = 3 \cdot x_2$. С другой стороны, по теореме Виета для многочлена третьей степени $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$, откуда $x_2 = \frac{1}{2}$. Так как $x_2 = 0.5$ — корень, то $8(0.5)^3 - 12(0.5)^2 - 2(0.5) + a = 0$, откуда $a = 3$. Далее,

$$8x^3 - 12x^2 - 2x + 3 = (x - 0.5)(8x^2 - 8x - 6),$$

и два оставшихся корня равны -0.5 и 1.5 . Значит, наибольший корень равен 1.5 .

В-6 Три различных корня уравнения $4x^3 - 18x^2 + 23x + a = 0$ составляют арифметическую прогрессию. Найдите наибольший из корней, ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ: 2.5

В-7 Три различных корня уравнения $16x^3 - 60x^2 + 59x + a = 0$ составляют арифметическую прогрессию. Найдите наибольший из корней, ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ: 2.25

В-8 Три различных корня уравнения $4x^3 + 6x^2 - x + a = 0$ составляют арифметическую прогрессию. Найдите наибольший из корней, ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ: 0.5

В-9 Три различных корня уравнения $4x^3 + 18x^2 + 23x + a = 0$ составляют арифметическую прогрессию. Найдите наибольший из корней, ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ: -0.5

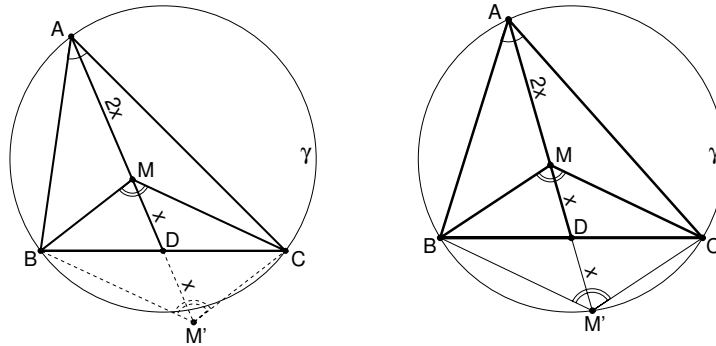
В-10 Три различных корня уравнения $16x^3 + 60x^2 + 59x + a = 0$ составляют арифметическую прогрессию. Найдите наибольший из корней, ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ: -0.25

Задача 6.

В-1 В треугольнике ABC $\angle BAC = 36^\circ$, $BC = 10\sqrt{3}$, M — точка пересечения медиан и $\angle BMC = 144^\circ$. Найдите длину медианы треугольника ABC , проведённой из вершины A .

Ответ: 15



Решение.

Пусть γ — окружность, описанная около ABC . Пусть точка M' лежит на продолжении медианы AD и $DM' = DM = x > 0$. По свойству медиан треугольника $AM : DM = 2 : 1 \Rightarrow AM = 2x$. Из равенства треугольников $\triangle BDM = \triangle CDM'$ и $\triangle CDM = \triangle BDM' \Rightarrow \triangle BMC = \triangle CM'B \Rightarrow \angle BMC = \angle CM'B = 144^\circ$. Отсюда $\angle BAC + \angle BM'C = 180^\circ$. Значит, по признаку вписанного четырёхугольника точка M' лежит на окружности. Хорды AM' и BC пересекаются в точке D , поэтому по теореме об отрезках пересекающихся хорд имеем

$$AD \cdot DM' = BD \cdot DC \iff 3x \cdot x = AD \cdot DM' = BD \cdot DC = 25 \cdot 3 \iff x = 5.$$

В-2 В треугольнике ABC $\angle BAC = 48^\circ$, $BC = 12\sqrt{3}$, M — точка пересечения медиан и $\angle BMC = 132^\circ$. Найдите длину медианы треугольника ABC , проведённой из вершины A .

Ответ: 18

В-3 В треугольнике ABC $\angle BAC = 18^\circ$, $BC = 14\sqrt{3}$, M — точка пересечения медиан и $\angle BMC = 162^\circ$. Найдите длину медианы треугольника ABC , проведённой из вершины A .

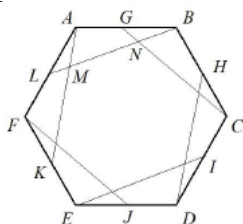
Ответ: 21

В-4 В треугольнике ABC $\angle BAC = 54^\circ$, $BC = 6\sqrt{3}$, M — точка пересечения медиан и $\angle BMC = 126^\circ$. Найдите длину медианы треугольника ABC , проведённой из вершины A .

Ответ: 9

В-5 В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ в серединах сторон AB, BC, CD, DE, EF и FA поставлены точки G, H, I, J, K и L соответственно. При пересечении отрезков AK, BL, CG, DH, EI, FJ образуется другой шестиугольник. Найдите его периметр, если $BC = 3$. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ: 13.61



Решение.

Для удобства выкладок обозначим длину стороны исходного шестиугольника через $2a$ (в нашем

случае $2a = 3$). Отрезки AK, BL, CG, DH, EI, FJ равны между собой, и их длины могут быть найдены по теореме косинусов:

$$BL^2 = (2a)^2 + a^2 - 2 \cdot 2a \cdot a \cdot \cos 120^\circ \implies BL = a\sqrt{7}.$$

Треугольники CBG и BNG подобны, поэтому

$$\frac{CB}{BN} = \frac{BG}{GN} = \frac{CG}{BG} \iff \frac{2a}{BN} = \frac{a}{GN} = \frac{a\sqrt{7}}{a}.$$

Отсюда $BN = \frac{2a}{\sqrt{7}}, GN = \frac{a}{\sqrt{7}}$. Так как $ML = GN$ (из равенства треугольников $\triangle LAM = \triangle GNB$), то $MN = a\sqrt{7} - \frac{2a}{\sqrt{7}} - \frac{a}{\sqrt{7}} = \frac{4a}{\sqrt{7}}$. Значит, отношение $\frac{MN}{AB} = \frac{2}{\sqrt{7}}$, периметры шестиугольников относятся так же, и потому периметр маленького шестиугольника равен $\frac{6 \cdot 3 \cdot 2}{\sqrt{7}} \approx 13.61$.

В-6 В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ в серединах сторон AB, BC, CD, DE, EF и FA поставлены точки G, H, I, J, K и L соответственно. При пересечении отрезков AK, BL, CG, DH, EI, FJ образуется другой шестиугольник. Найдите его периметр, если $AB = 4$. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ: 18.14

В-7 В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ в серединах сторон AB, BC, CD, DE, EF и FA поставлены точки G, H, I, J, K и L соответственно. При пересечении отрезков AK, BL, CG, DH, EI, FJ образуется другой шестиугольник. Найдите его периметр, если $CD = 5$. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ: 22.68

В-8 В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ в серединах сторон AB, BC, CD, DE, EF и FA поставлены точки G, H, I, J, K и L соответственно. При пересечении отрезков AK, BL, CG, DH, EI, FJ образуется другой шестиугольник. Найдите его периметр, если $AF = 6$. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ: 27.21

Задача 7.

В-1 Решите (относительно x) неравенство

$$|p(x) + q(x) + r(x) + s(x)| \geq |p(x)| + |q(x)| + |r(x)| + |s(x)|,$$

где

$$p(x) = 1.1 - \cos 2x - \sin^2 x,$$

$$q(x) = x^2 - 2x - 8,$$

$$r(x) = 2^x - 0.125,$$

$$s(x) = \log_3(6 - x).$$

В ответе укажите количество целочисленных решений.

Ответ: 4. $x \in [-3, -2] \cup [4, 5]$.

Решение. Модуль суммы всегда меньше либо равен сумме модулей:

$$|p(x) + q(x) + r(x) + s(x)| \leq |p(x) + q(x)| + |r(x) + s(x)| \leq |p(x)| + |q(x)| + |r(x)| + |s(x)|.$$

Чтобы это неравенство не противоречило неравенству из условия, нужно, чтобы все четыре выражения принимали одинаковый знак (или равнялись нулю). При этом $p(x) = 1.1 - \cos 2x - \sin^2 x = 0.1 + 2\sin^2 x - \sin^2 x = 0.1 + \sin^2 x > 0$, то есть $q(x), r(x), s(x)$ тоже должны быть неотрицательны. Поэтому исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 8 \geq 0, \\ 2^x - 0.125 \geq 0, \\ \log_3(6 - x) \geq 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x \notin (-2, 4) \\ x \geq -3 \\ x \leq 5. \end{cases}$$

Значит, множество решений неравенство содержит 4 целых числа.

В-2 Решите (относительно x) неравенство

$$|p(x) + q(x) + r(x) + s(x)| \geq |p(x)| + |q(x)| + |r(x)| + |s(x)|,$$

где

$$p(x) = 1.2 + \cos 2x - \cos^2 x,$$

$$q(x) = x^2 - x - 6,$$

$$r(x) = 2^{x+5} - 0.125,$$

$$s(x) = \log_3(4 - x).$$

В ответе укажите количество целочисленных решений.

Ответ: 8. $x \in [-8, -2] \cup \{3\}$

В-3 Решите (относительно x) неравенство

$$|p(x) + q(x) + r(x) + s(x)| \geq |p(x)| + |q(x)| + |r(x)| + |s(x)|,$$

где

$$p(x) = 1.1 - \cos 2x - \sin^2 x,$$

$$q(x) = x^2 - x - 6,$$

$$r(x) = 2^x - 0.125,$$

$$s(x) = \log_3(7 - x).$$

В ответе укажите количество целочисленных решений.

Ответ: 6. $x \in [-3, -2] \cup [3, 6]$

В-4 Решите (относительно x) неравенство

$$|p(x) + q(x) + r(x) + s(x)| \geq |p(x)| + |q(x)| + |r(x)| + |s(x)|,$$

где

$$p(x) = 1.2 + \cos 2x - \cos^2 x,$$

$$q(x) = x^2 - 2x - 8,$$

$$r(x) = 2^x - 0.125,$$

$$s(x) = \log_3(8 - x).$$

В ответе укажите количество целочисленных решений.

Ответ: 6. $x \in [-3, -2] \cup [4, 7]$

В-5 Решите (относительно x) неравенство

$$|p(x) + q(x) + r(x) + s(x)| \geq |p(x)| + |q(x)| + |r(x)| + |s(x)|,$$

где

$$p(x) = 1.1 - \cos 2x - \sin^2 x,$$

$$q(x) = x^2 - x - 6,$$

$$r(x) = 2^{x-1} - 0.125,$$

$$s(x) = \log_3(7 - x).$$

В ответе укажите количество целочисленных решений.

Ответ: 5. $x \in \{-2\} \cup [3, 6]$

В-6 Найдите сумму корней уравнения

$$3 \cos(2\pi x) + 3 \sin \frac{\pi x}{4} = 14 \left(\cos \frac{\pi x}{2} - \sin \frac{\pi x}{2} \right)^2 - 3 \left(\cos \frac{\pi x}{8} - \sin \frac{\pi x}{8} \right)^2$$

принадлежащих отрезку $[2020; 2028]$.

Ответ: 8094

В-7 Найдите сумму корней уравнения

$$3 \cos(2\pi x) - 3 \sin \frac{\pi x}{4} = 14 \left(\cos \frac{\pi x}{2} + \sin \frac{\pi x}{2} \right)^2 - 3 \left(\cos \frac{\pi x}{8} + \sin \frac{\pi x}{8} \right)^2$$

принадлежащих отрезку $[2018; 2026]$.

Ответ: 8090

В-8 Найдите сумму корней уравнения

$$3 \cos(2\pi x) + 3 \sin \frac{\pi x}{4} = 14 \left(\cos \frac{\pi x}{2} - \sin \frac{\pi x}{2} \right)^2 - 3 \left(\cos \frac{\pi x}{8} - \sin \frac{\pi x}{8} \right)^2$$

принадлежащих отрезку $[2018; 2026]$.

Ответ: 8086

В-9 Найдите сумму корней уравнения

$$3 \cos(2\pi x) - 3 \sin \frac{\pi x}{4} = 14 \left(\cos \frac{\pi x}{2} + \sin \frac{\pi x}{2} \right)^2 - 3 \left(\cos \frac{\pi x}{8} + \sin \frac{\pi x}{8} \right)^2$$

принадлежащих отрезку $[2020; 2028]$.

Ответ: 8098

Решение. Преобразуем уравнение:

$$3 \cos(2\pi x) - 3 \sin \frac{\pi x}{4} = 14 \left(\cos \frac{\pi x}{2} + \sin \frac{\pi x}{2} \right)^2 - 3 \left(\cos \frac{\pi x}{8} + \sin \frac{\pi x}{8} \right)^2,$$

$$3(1 - 2 \sin^2 \pi x) - 3 \sin \frac{\pi x}{4} = 14(1 + \sin \pi x) - 3 - 3 \sin \frac{\pi x}{4},$$

$$3 \sin^2 \pi x + 7 \sin \pi x + 4 = 0,$$

$$\sin \pi x = -1.$$

Значит, $\pi x = 2\pi n - \frac{\pi}{2}$, $x = 2n - 0.5$. В заданный отрезок попадут корни 2021.5, 2023.5, 2025.5 и 2027.5. Их сумма равна 8098.

Задача 8.

В-1 Найдите количество натуральных $n < 2023$, при каждом из которых среди корней уравнения $x - \sqrt{x} = nx - \sqrt{nx}$ имеется положительное рациональное число.

Ответ: 44

Решение. Исходное уравнение равносильно равносильно уравнению

$$x(1 - \sqrt{n})(1 + \sqrt{n}) = \sqrt{x}(1 - \sqrt{n}).$$

Если $n = 1$, то любое неотрицательное число x будет решением, поэтому $n = 1$ подходит.

Если $n \neq 1$, $x > 0$, получаем уравнение

$$\sqrt{x}(1 + \sqrt{n}) = 1,$$

откуда

$$x = \frac{1}{(1 + \sqrt{n})^2} = \frac{1}{1 + n + 2\sqrt{n}}.$$

Значит, x будет рациональным только тогда, когда $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$. Таким образом, в качестве n подходят все точные квадраты натуральных чисел, не превосходящие 2022: $1, 2^2, 3^2, \dots, 44^2$ — итого 44 значения.

В-2 Найдите количество натуральных $n < 2024$, при каждом из которых среди корней уравнения $x - \sqrt{x} = nx - \sqrt{nx}$ имеется положительное рациональное число.

Ответ: 44

В-3 Найдите количество натуральных $n < 2025$, при каждом из которых среди корней уравнения $x - \sqrt{x} = nx - \sqrt{nx}$ имеется положительное рациональное число.

Ответ: 44

В-4 Найдите количество натуральных $n < 2026$, при каждом из которых среди корней уравнения $x - \sqrt{x} = nx - \sqrt{nx}$ имеется положительное рациональное число.

Ответ: 45

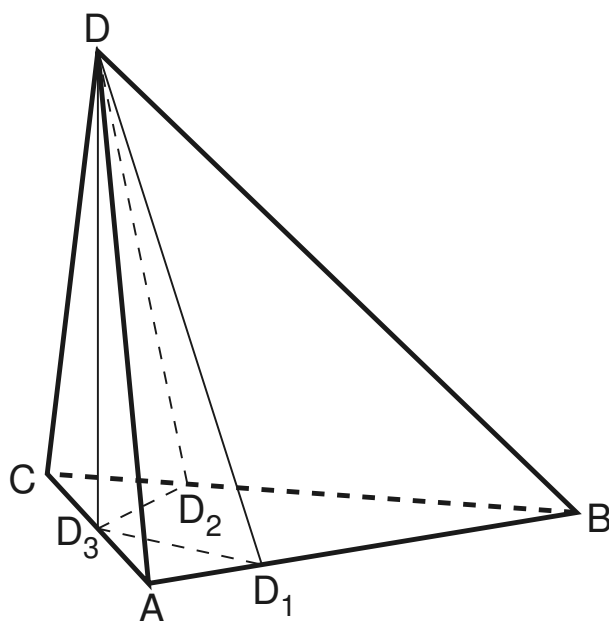
Задача 9.

В-1 В треугольной пирамиде $DABC$, в основании которой лежит остроугольный треугольник ABC , боковая грань DAC перпендикулярна основанию, рёбра DB и AC перпендикулярны, а расстояние между проекциями вершины D пирамиды на рёбра AB и BC равно 7. Найдите объём пирамиды, если её высота равна 1, а радиус окружности, описанной около основания, равен 9.

Ответ: 21

Решение. Обозначим проекцию вершины D на плоскость ABC через D_3 . Поскольку плоскость DAC перпендикулярна плоскости ABC , отрезок DD_3 лежит в плоскости DAC и перпендикулярен ребру AC . Так как $DB \perp AC$, то и $BD_3 \perp AC$ (по теореме о трёх перпендикулярах).

Из точки D_3 опустим перпендикуляры на рёбра AB и BC — соответственно D_3D_1 и D_3D_2 . Тогда по теореме о трёх перпендикулярах точки D_1 и D_2 будут проекциями точки D на рёбра AB и BC , так что $D_1D_2 = 7$.



Так как $\angle BD_1D_3 + \angle BD_2D_3 = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, то четырёхугольник $BD_1D_3D_2$ можно вписать в окружность с диаметром BD_3 . Пусть $\angle ABC = \beta$. По теореме синусов для треугольников BD_1D_2 и ABC имеем

$$\frac{D_1D_2}{\sin \beta} = BD_3 \quad \text{и} \quad \frac{AC}{\sin \beta} = 2 \cdot 9 = 18.$$

Поэтому площадь основания равна

$$S = \frac{AC \cdot BD_3}{2} = \frac{18 \sin \beta \cdot D_1D_2}{2 \sin \beta} = \frac{18 \cdot 7}{2} = 63.$$

Отсюда получаем объём пирамиды $V = \frac{1}{3} DD_3 \cdot S(ABC) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 63 = 21$.

В-2 В треугольной пирамиде $DABC$, в основании которой лежит остроугольный треугольник ABC , боковая грань DAC перпендикулярна основанию, рёбра DB и AC перпендикулярны, а расстояние между проекциями вершины D пирамиды на рёбра AB и BC равно 4. Найдите объём пирамиды, если её высота равна 2, а радиус окружности, описанной около основания, равен 6.

Ответ: 16

В-3 В треугольной пирамиде $DABC$, в основании которой лежит остроугольный треугольник ABC , боковая грань DAC перпендикулярна основанию, рёбра DB и AC перпендикулярны, а расстояние между проекциями вершины D пирамиды на рёбра AB и BC равно 3. Найдите объём пирамиды, если её высота равна 4, а радиус окружности, описанной около основания, равен 5.

Ответ: 20

В-4 В треугольной пирамиде $DABC$, в основании которой лежит остроугольный треугольник ABC , боковая грань DAC перпендикулярна основанию, рёбра DB и AC перпендикулярны, а расстояние между проекциями вершины D пирамиды на рёбра AB и BC равно 5. Найдите объём пирамиды, если её высота равна 3, а радиус окружности, описанной около основания, равен 7.

Ответ: 35

В-5 Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точки K , L и M лежат соответственно на прямых AD , CD и DD_1 , причём $AK = 2$, $DK = 9$, $CL = 31$, $DL = 20$, $DM = 16$, $D_1M = 5$. Найти площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точки K , L и M . Ответ округлить до целых.

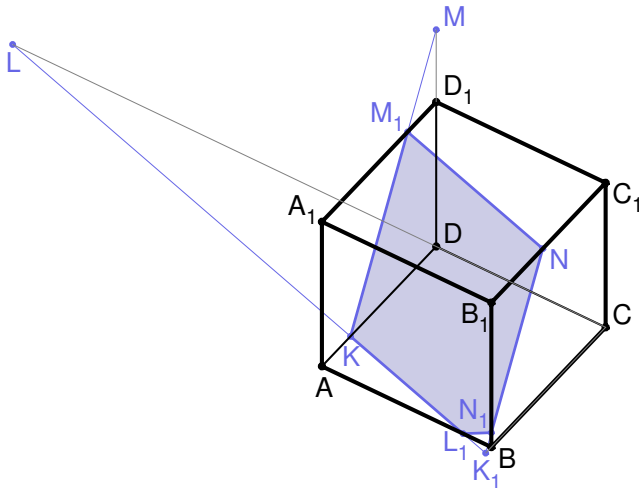
Ответ: 128

Решение. Заметим, что $AK + DK = CL - DL = DM - D_1M = a$ (в нашем случае $a = 11$). Отсюда следует, что K лежит на самом ребре AD длиной a , а точки L и M — на продолжениях соответствующих рёбер.

Пусть M_1 — точка пересечения прямых MK и A_1D_1 , а L_1 и K_1 — точки пересечения прямой LK с прямыми AB и BC соответственно. Тогда

$$D_1M_1 = \frac{DK \cdot D_1M}{DM}, \quad AL_1 = \frac{DL \cdot AK}{DK} < AB, \quad CK_1 = \frac{DK \cdot CL}{DL} > BC, \quad BK_1 = CK_1 - a.$$

Таким образом, L_1 лежит на ребре AB , а K_1 — за пределами куба.



Пусть N — такая точка на прямой B_1C_1 , что $NK_1 \parallel MK$. Тогда KM_1NK_1 — параллелограмм и $B_1N = A_1M_1 - AK - BK_1 = A_1D_1 - D_1M_1 - AK - BK_1$, что больше 0, но меньше B_1C_1 , т. е. точка N лежит внутри ребра B_1C_1 .

Пусть N_1 — точка пересечения прямых NK_1 и BB_1 . Тогда

$$BN_1 = \frac{BB_1 \cdot BK_1}{BK_1 + B_1N}.$$

Сечение представляет собой параллелограмм KM_1NK_1 , от которого отрезан треугольник $L_1K_1N_1$, а площадь сечения — разность площадей параллелограмма и треугольника. Так как

$$\frac{K_1L_1}{K_1K} = \frac{AB - AL_1}{AB}, \quad \frac{K_1N_1}{K_1N} = \frac{BK_1}{BK_1 + B_1N},$$

$$\text{то} \quad \frac{S(\triangle L_1 K_1 N_1)}{S(K M_1 N K_1)} = \frac{(AB - AL_1) \cdot BK_1}{2AB \cdot (BK_1 + B_1 N)} = \frac{(AB - AL_1) \cdot (CK_1 - BC)}{2AB \cdot (A_1 D_1 - D_1 M_1 - AK)}.$$

Итак, вычислив площадь параллелограмма и умножив её на

$$1 - \frac{(a - AL_1)(CK_1 - a)}{2a(DK - D_1 M_1)},$$

мы получим площадь сечения.

Для вычисления площади параллелограмма $K M_1 N K_1$ найдём координаты векторов $\vec{k} = \overrightarrow{K K_1}$ и $\vec{m} = \overrightarrow{K M_1}$ в системе с осями X, Y, Z , направленными вдоль векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}$:

$$k_x = a, \quad k_y = -a \cdot DK/DL, \quad k_z = 0,$$

$$m_x = 0, \quad m_y = a \cdot DK/DM, \quad m_z = a.$$

Координаты векторного произведения $\vec{p} = \vec{k} \times \vec{m}$ равны

$$p_x = -a^2 \cdot DK/DL, \quad p_y = -a^2, \quad p_z = a^2 \cdot DK/DM.$$

Поэтому площади параллелограмма $K M_1 N K_1$ и сечения равны, соответственно,

$$S(K M_1 N K_1) = a^2 \sqrt{1 + \frac{DK^2}{DL^2} + \frac{DK^2}{DM^2}},$$

$$S = a \left(a - \frac{(a - AL_1)(CK_1 - a)}{2(DK - D_1 M_1)} \right) \sqrt{1 + \frac{DK^2}{DL^2} + \frac{DK^2}{DM^2}}.$$

В-6 Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точки K, L и M лежат соответственно на прямых AD, CD и DD_1 , причём $AK = 1, DK = 6, CL = 23, DL = 16, DM = 14, D_1 M = 7$. Найти площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точки K, L и M . Ответ округлить до целых.

Ответ: 47

В-7 Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точки K, L и M лежат соответственно на прямых AD, CD и DD_1 , причём $AK = 1, DK = 7, CL = 23, DL = 15, DM = 16, D_1 M = 8$. Найти площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точки K, L и M . Ответ округлить до целых.

Ответ: 54

В-8 Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точки K, L и M лежат соответственно на прямых AD, CD и DD_1 , причём $AK = 2, DK = 8, CL = 28, DL = 18, DM = 16, D_1 M = 6$. Найти площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точки K, L и M . Ответ округлить до целых.

Ответ: 104