

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Отборочный этап 2022/23 учебного года для 5-6 классов

Задача 1.

В-1 Сколькими способами можно разменять купюру 1000 рублей монетами достоинством 5 и 10 рублей?

Ответ: 101

Решение. Находим количество решений в неотрицательных целых числах уравнения

$$5n + 10m = 1000 \iff n + 2m = 200.$$

Если $m > 100$, то n отрицательно, поэтому $0 \leq m \leq 100$. При каждом таком m число n тоже неотрицательно: $n = 200 - 2m$. Значит, способов всего столько, сколько есть различных подходящих m , то есть 101.

В-2 Сколькими способами можно разменять купюру 500 рублей монетами достоинством 10 и 2 рубля?

Ответ: 51

В-3 Сколькими способами можно разменять купюру 1000 рублей монетами достоинством 2 и 10 рублей?

Ответ: 101

В-4 Сколькими способами можно разменять купюру 500 рублей монетами достоинством 5 и 10 рублей?

Ответ: 51

Задача 2.

В-1 Карта Флатландии — прямоугольник, разбитый на губернии прямыми. Какое минимальное число губерний может быть на карте, если проведены 2022 прямые?

Ответ: 2023

Решение. Будем проводить прямые последовательно. Если каждая следующая прямая не пересекает ни одну из предыдущих (либо пересекает её за пределами нашего прямоугольника), то при проведении этой прямой ровно одна губерния делится на две части (а с остальными губерниями ничего не происходит), и количество губерний увеличивается на 1. Если же следующая прямая пересекает какие-то из предыдущих, то они делит на две части как минимум две губернии, и число губерний увеличивается минимум на 2. Значит, наименьшее количество губерний получится, если все прямые параллельны друг другу (или пересекаются за пределами прямоугольника), и это количество губерний на 1 больше количества прямых.

В-2 Карта Флатландии — прямоугольник, разбитый на губернии прямыми. Какое минимальное число губерний может быть на карте, если проведены 2023 прямые?

Ответ: 2024

В-3 Карта Флатландии — прямоугольник, разбитый на губернии прямыми. Какое минимальное число губерний может быть на карте, если проведены 2024 прямые?

Ответ: 2025

В-4 Карта Флатландии — прямоугольник, разбитый на губернии прямыми. Какое минимальное число губерний может быть на карте, если проведено 2025 прямых?

Ответ: 2026

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2022/23 учебного года для 5-6 классов

Задача 3.

В-1 Улитка в 6 часов утра начинает вползать на дерево высотой 17 м. За час она поднимается с постоянной скоростью на 1 м, а потом отдыхает час, сползая с постоянной скоростью на 10 см, затем снова заползает за час на 1 м, снова сползает за час на 10 см и т. д. до конца дня, т. е. до 18 часов. После этого она засыпает на ночь до 6 утра, сползая со скоростью 10 см в час. Каждый следующий день повторяется то же самое. Через сколько часов после начала подъёма улитка доползёт до вершины дерева?

Ответ: 80.8

Решение. За сутки улитка поднимается 6 часов и спускается 18 часов, а высота, на которой она находитесь, увеличивается на $6 \cdot 1 - 18 \cdot 0,1 = 4,2$ м. За трое суток эта высота увеличится на $3 \cdot 4,2 = 12,6$ м. Каждые 2 часа днём улитка поднимается на $1 - 0,1 = 0,9$ м, через 8 часов после начала четвёртого дня улитка окажется на высоте $12,6 + 4 \cdot 0,9 = 16,2$ м, и ей останется проползти $17 - 16,2 = 0,8$ м, которые она преодолеет за 0,8 ч. То есть время подъёма составит 3 суток и 8,8 часов, т.е. $3 \cdot 24 + 8,8 = 80,8$ часов.

В-2 Улитка в 6 часов утра начинает вползать на дерево высотой 40 м. За час она поднимается с постоянной скоростью на 2 м, а потом отдыхает час, сползая с постоянной скоростью на 20 см, затем снова заползает за час на 2 м, снова сползает за час на 20 см и т. д. до конца дня, т. е. до 18 часов. После этого она засыпает на ночь до 6 утра, сползая со скоростью 20 см в час. Каждый следующий день повторяется то же самое. Через сколько часов после начала подъёма улитка доползёт до вершины дерева?

Ответ: 102.5

В-3 Улитка в 6 часов утра начинает вползать на дерево высотой 10 м. За час она поднимается с постоянной скоростью на 1 м, а потом отдыхает час, сползая с постоянной скоростью на 20 см, затем снова заползает за час на 1 м, снова сползает за час на 20 см и т. д. до конца дня, т. е. до 18 часов. После этого она засыпает на ночь до 6 утра, сползая со скоростью 20 см в час. Каждый следующий день повторяется то же самое. Через сколько часов после начала подъёма улитка доползёт до вершины дерева?

Ответ: 78.4

В-4 Улитка в 6 часов утра начинает вползать на дерево высотой 50 м. За час она поднимается с постоянной скоростью на 2 м, а потом отдыхает час, сползая с постоянной скоростью на 10 см, затем снова заползает за час на 2 м, снова сползает за час на 10 см и т. д. до конца дня, т. е. до 18 часов. После этого она засыпает на ночь до 6 утра, сползая со скоростью 10 см в час. Каждый следующий день повторяется то же самое. Через сколько часов после начала подъёма улитка доползёт до вершины дерева?

Ответ: 104.8

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2022/23 учебного года для 5-6 классов

Задача 4.

В-1 У каждого ученика в классе не менее 15 друзей, причем не более 15 учеников имеют одинаковое число друзей. Какое наименьшее число учеников может быть в классе?

Ответ: 17

Решение. Нарисуем граф: ученики — это точки, ребро — дружба между учениками. Так как у каждого не менее 15 друзей, то всего учеников хотя бы 16. Ровно 16 учеников быть не может, так как тогда все вершины будут соединены со всеми, и у всех 16 учеников будет поровну друзей, что противоречит условию. Значит, учеников хотя бы 17. Пример для 17 — 17 вершин, где каждая соединена с каждой, но одного ребра нет (получается 15 учеников с 16 друзьями у каждого и 2 — с 15-ю).

В-2 У каждого ученика в классе не менее 16 друзей, причем не более 16 учеников имеют одинаковое число друзей. Какое наименьшее число учеников может быть в классе?

Ответ: 18

В-3 У каждого ученика в классе не менее 17 друзей, причем не более 17 учеников имеют одинаковое число друзей. Какое наименьшее число учеников может быть в классе?

Ответ: 19

В-4 У каждого ученика в классе не менее 18 друзей, причем не более 18 учеников имеют одинаковое число друзей. Какое наименьшее число учеников может быть в классе?

Ответ: 20

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2022/23 учебного года для 5-6 классов

Задача 5.

В-1 В домике живут 15 гномиков, среди которых могут быть гномики ростом 10, 11, 12 и 13 сантиметров. Их суммарный рост равен 190 сантиметров. Сколько среди них гномиков ростом 13 сантиметров, если их в 2 раза больше, чем гномиков ростом 12 сантиметров?

Ответ: 10

Решение. Решение приведём в общем виде. Есть $3x$ гномиков. Возможные росты гномиков равны a, b, c, d , где $a < b < c < d$. Их суммарный рост равен $x(c + 2d)$. Гномиков роста d в два раза больше, чем гномиков роста c . Найдём количество гномиков роста d . Пусть есть k гномиков роста c , тогда есть $2k$ гномиков роста d . Их суммарный рост $k(c + 2d)$. Есть $3x - 3k$ гномиков роста, отличного от c и d , тогда их рост не превосходит $(3x - 3k)b$. Предположим, что $k < x$, тогда суммарный рост равен $x(c + 2d)$, с другой стороны, он не больше $k(c + 2d) + (x - k) \cdot 3b < k(c + 2d) + (x - k)(c + 2d) = x(2c + d)$, противоречие. Так как гномиков всего $3x$, а гномиков ростов c и d вместе $3k$, то $3k \leq 3x, k \leq x$. Значит, $k = x$, гномиков роста d ровно $2x = 2 \cdot 5 = 10$.

В-2 В домике живут 18 гномиков, среди которых могут быть гномики ростом 11, 12, 13 и 14 сантиметров. Их суммарный рост равен 246 сантиметров. Сколько среди них гномиков ростом 14 сантиметров, если их в 2 раза больше, чем гномиков ростом 13 сантиметров?

Ответ: 12

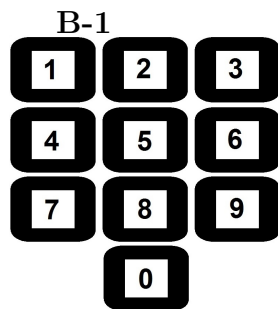
В-3 В домике живёт 21 гномик, среди которых могут быть гномики ростом 12, 13, 14 и 15 сантиметров. Их суммарный рост равен 308 сантиметров. Сколько среди них гномиков ростом 15 сантиметров, если их в 2 раза больше, чем гномиков ростом 14 сантиметров?

Ответ: 14

В-4 В домике живут 24 гномика, среди которых могут быть гномики ростом 13, 14, 15 и 16 сантиметров. Их суммарный рост равен 376 сантиметров. Сколько среди них гномиков ростом 16 сантиметров, если их в 2 раза больше, чем гномиков ростом 15 сантиметров?

Ответ: 16

Задача 6.



Планшет обладает стандартным экраном блокировки (см. рис.). Владелец планшета вводит четырёхзначный пароль, а взломщик наблюдает со стороны. Он не видит точные цифры, которые нажимает владелец, но следит за движением пальца: вторая цифра находится левее и ниже первой, третья цифра находится ровно выше второй (не левее и не правее), последняя, четвёртая — правее и ниже третьей. Сколько комбинаций надо перебрать взломщику, чтобы гарантировано снять пароль с планшета, если известно, что первая цифра пароля 2?

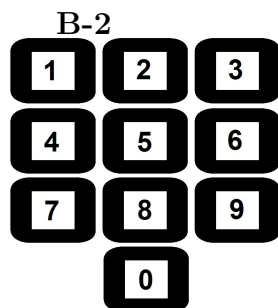
Ответ: 13

Решение. Заметим, что если на третьем месте в пароле стоит 1, то для четвёртой цифры имеется пять вариантов (5, 6, 8, 9, 0), если 2 — то два (6, 9), если 4 — то три (8, 9, 0), если 5 — то один (9), если 7 — то один (0), если какая-то другая цифра — то нет вариантов. Если вторая цифра 4, то третьей может быть только 1, а, значит, вариантов будет пять, если вторая цифра 5, то третьей может быть только 2, а, значит, вариантов будет два, если вторая цифра 7, то третьей может быть 1 или 4, а, значит, вариантов будет $5 + 3 = 8$, если вторая цифра 8, то третьей может быть 2 или 5, а, значит, вариантов будет $2 + 1 = 3$, если вторая цифра 0, то третьей может быть 2, 5 или 8, а, значит, вариантов будет $2 + 1 + 0 = 3$, если вторая цифра какая-то другая, то число вариантов в этом случае в итоге будет равно нулю.

Если первая цифра 2, то второй может быть 4 или 7, а, значит, число вариантов равно $5 + 8 = 13$.

Для второго варианта задачи: если первая цифра 3, то второй может быть 4, 5, 7, 8 или 0, а, значит, число вариантов равно $5 + 2 + 8 + 3 + 3 = 21$.

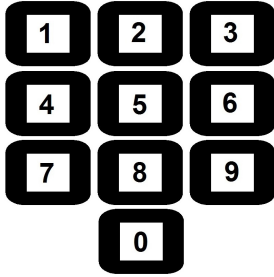
Для третьего варианта задачи: если первая цифра 6, то второй может быть 7, 8 или 0, а, значит, число вариантов равно $8 + 3 + 3 = 14$.



Планшет обладает стандартным экраном блокировки (см. рис.). Владелец планшета вводит четырёхзначный пароль, а взломщик наблюдает со стороны. Он не видит точные цифры, которые нажимает владелец, но следит за движением пальца: вторая цифра находится левее и ниже первой, третья цифра находится ровно выше второй (не левее и не правее), последняя, четвёртая — правее и ниже третьей. Сколько комбинаций надо перебрать взломщику, чтобы гарантировано снять пароль с планшета, если известно, что первая цифра пароля 3?

Ответ: 21

В-3



Планшет обладает стандартным экраном блокировки (см. рис.). Владелец планшета вводит четырёхзначный пароль, а взломщик наблюдает со стороны. Он не видит точные цифры, которые нажимает владелец, но следит за движением пальца: вторая цифра находится левее и ниже первой, третья цифра находится ровно выше второй (не левее и не правее), последняя, четвёртая — правее и ниже третьей. Сколько комбинаций надо перебрать взломщику, чтобы гарантировано снять пароль с планшета, если известно, что первая цифра пароля 6?

Ответ: 14
