



Олимпиада школьников «Ломоносов». 2024/25 учебный год.  
Задания заключительного этапа по высоким технологиям.  
11 класс. Вариант 1

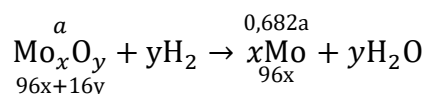
**Задача 1. Молибденовая синь (5 баллов)**

Восстановлением ортомолибдата калия можно получить соединение **A**, которое используется в качестве синего пигмента или катализатора. Термический анализ показал, что нагревание соединения **A** в инертной атмосфере приводит к уменьшению массы исследуемого образца на 2.5% и образованию бинарного соединения **B**. Нагревание соединения **B** в атмосфере водорода приводит к уменьшению массы образца ещё на 31.8%. В обоих случаях выделяется газообразный продукт **C** с молярной массой 18 г/моль.

1. Установите формулы молибденовой сини **A**, а также веществ **B** и **C**. Подтвердите расчетом. Атомные массы элементов округляйте до целых.

**Решение**

Соединение **C** имеет молярную массу 18 г/моль и образуется при восстановлении **B** водородом. Можно предположить, что **C** – это вода  $H_2O$ . Следовательно соединение **B** должно содержать кислород, то есть это оксид молибдена. Схема реакции восстановления:

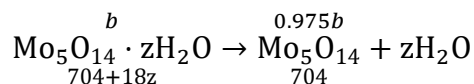


Молярная масса оксида  $M(Mo_xO_y) = 96x + 16y$  г/моль. Масса образца уменьшается на 31.8%, значит остаётся  $100 - 31.8 = 68.2\%$ . Пусть масса образца была равна  $a$  г, следовательно, масса металла равна  $0.682a$  г. Составим пропорцию и найдём соотношение  $x$  и  $y$ .

$$96xa = (96x + 16y) \cdot 0.682a$$
$$2.8x = y$$

При  $x = 5$  получаем  $y = 14$ . Таким образом, состав **B** –  $Mo_5O_{14}$ .

Так как вода выделяется и при восстановлении оксида, и при разложении соединения **A**, то оно является кристаллогидратом. Молярная масса оксида  $M(Mo_5O_{14}) = 704$  г/моль. Масса образца уменьшается на 2.5%, значит остаётся  $100 - 2.5 = 97.5\%$ . Пусть масса образца была равна  $b$  г, следовательно масса оксида равна  $0.975b$  г. Схема реакции разложения:



Составим пропорцию и найдём  $z$ .

$$704b = (704 + 18z) \cdot 0.975b$$
$$z = 1$$

Таким образом, состав **A** –  $Mo_5O_{14} \cdot H_2O$ .

**(2 балла за формулу соединения A (с расчётами), 2 балла за формулу соединения B (с расчётами), 1 балл за формулу соединения C (с расчётами или пояснением)).**

## Задача 2. Алмазная память (5 баллов)

Группа ученых использовала кристалл алмаза для записи и надежного длительного хранения информации. Для этого фемтосекундным лазером внутри кристалла создается упорядоченный массив микрополостей (МП) фиксированных размеров, которые затем подсвечиваются еще одним лазером, а размер («яркость») каждой МП послойно считывается при помощи микроскопа (рис. 1.).

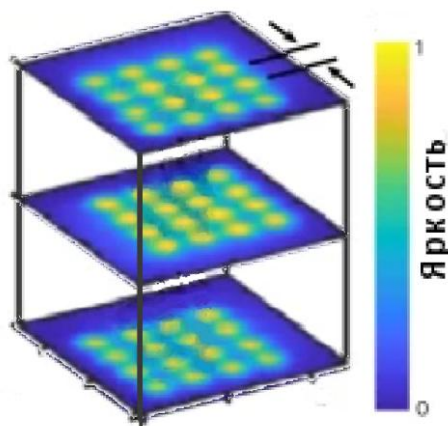


Рис. 1. Пример визуализации данных в кристалле алмаза, полученной при помощи лазера и микроскопа. Отвечающие данным МП расположены слоями, а их центры внутри слоя размещены друг относительно друга как вершины квадрата.

1. Какой объем информации кодирует одна МП, если такой метод позволяет записать и различить при чтении 8 разных размеров МП (включая нулевой размер)?
2. Рассчитайте, сколько информации (в гигабайтах) поместится в алмазе весом 1 карат (200 мг), если плотность алмаза составляет  $3.5 \text{ г/см}^3$ , а расстояние между соседними слоями и центрами МП в одном слое составляют 1 мкм и 460 нм, соответственно.

Считайте, что 1 кБ = 1024 Б, 1 МБ = 1024 кБ, 1 ГБ = 1024 МБ, 1 ТБ = 1024 ГБ.

### Решение

1. (1 балл)

Поскольку каждая из микрополостей (МП) может принимать одно из 8 значений, то, следовательно, она кодирует  $\log_2 8 = 3$  бита информации.

2. (4 балла)

На прямоугольный параллелепипед объемом

$$V = a^2 b = (460 \cdot 10^{-7})^2 \cdot 1 \cdot 10^{-4} = 2.12 \cdot 10^{-13} \text{ см}^3$$

приходится одна МП (в каждой из его 8 вершин лежит одна МП, но такая МП принадлежит одновременно 8 таким параллелепипедам).

Тогда на алмаз массой 1 карат приходится

$$N = (m/\rho)/V = 0.2/3.5/((460 \cdot 10^{-7})^2 \cdot 1 \cdot 10^{-4}) = 2.70 \cdot 10^{11} \text{ таких МП.}$$

Таким образом, всего в однокаратном алмазе может быть закодирован объем информации, равный

$$I = 3N = 3 \cdot 2.70 \cdot 10^{11} = 8.01 \cdot 10^{11} \text{ бит} = 94.3 \text{ ГБ.}$$

Оценка снижалась за:

- арифметические ошибки;
- ошибки в порядках величин (перевод нанометров и микрометров в сантиметры или метры);
- ошибки в формуле расчета количества информации исходя из числа возможных состояний;
- ошибки расчета числа МП, приходящегося на единичный объем, либо объема, приходящегося на одну МП (например, не учитывался тот факт, что одна МП принадлежит сразу нескольким единичным объемам), что приводило к неверной оценке общего числа МП;
- ошибки в формуле расчета объема исходя из массы и плотности материала;
- ошибки при переводе из бит в байты, кило-, мега- и гигабайты.

### Задача 3. Спутники связи (6 баллов)

Спутниковая связь существует уже десятилетия. Однако, в последнее время вырос интерес к высокоскоростному спутниковому интернету. Этот доступ обеспечивается большим числом спутников связи, имеющих низкую орбиту.

1. Полагая орбиту круговой, найдите период обращения такого спутника  $T$ , если высота орбиты над поверхностью Земли  $h = 500$  км. Радиус Земли  $R = 6400$  км. Масса Земли  $M_3 = 6.0 \cdot 10^{24}$  кг.
2. Какое минимальное количество спутников  $N$  нужно вывести на орбиту, чтобы обеспечивать непрерывное соединение? Считайте, что спутник находится в зоне видимости  $\tau = 10$  мин.
3. Чему равно время распространения радиосигнала до поверхности Земли от низкоорбитального спутника  $t_{\text{сигнала}}$ ?

### Решение

1. Период обращения можем найти, зная длину траектории спутника и его скорость.

$$T = \frac{2\pi(R_0 + h)}{v}$$

(1 балл)

Сила гравитационного притяжения обеспечивает центростремительное ускорение.

$$\frac{mv^2}{R_0 + h} = G \frac{mM}{(R_0 + h)^2}$$

(2 балла)

Отсюда выражаем период обращения (формула (1))

$$T = \frac{2\pi(R_0 + h)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM}}$$

**(1 балл)**

Подстановка дает  $T \approx 5691$  сек = 94.85 мин.

2. Используя (1), получим количество спутников.

$$N = \frac{T}{\tau}$$

Расчеты дают  $N = 9.485$ . Значит, нужно вывести минимум 10 спутников. **(1 балл)**

3. Время распространения сигнала найдем по формуле:

$$t_{\text{сигнала}} = \frac{h}{c}$$

Подстановка дает  $t_{\text{сигнала}} \approx 1.6$  мс. **(1 балл)**

#### **Задача 4. Дорогой металл (6 баллов)**

Металл **X** в 19 веке ценился дороже золота. Для получения **X** металлический натрий сплавляли с веществом **Y**, содержащим 8.74% элемента **X** по массе. Вещество **Y** получали из поваренной соли и хлорида элемента **X**, содержащего 20.22% **X** по массе.

1. Определите неизвестные вещества.
2. Запишите уравнения двух реакций.

#### **Решение**

1. Найдём формулу хлорида. Пусть общая формула хлорида  $XCl_n$ , где  $n$  – валентность металла. Массовая доля хлора равна  $100 - 20.22 = 79.78\%$ , тогда  $M(XCl_n) = 35.5n / 0.7978 = 44.5n$ . Перебором находим:  $n = 3$ ,  $X = Al$ . Вещество  $Y = Na_3AlCl_6$  ( $\omega(Al) = 27 / (3 \cdot 23 + 27 + 6 \cdot 35.5) = 0.0874$ ).

**(4 балла – по 2 балла за формулы X и Y)**

2. Уравнения реакций:  
 $3NaCl + AlCl_3 = Na_3AlCl_6$   
 $Na_3AlCl_6 + 3Na = Al + 6NaCl$

**(2 балла)**

### Задача 5. Изотопы (6 баллов)

В природе углерод состоит из смеси атомов, 98.9% которых – легкий изотоп  $^{12}\text{C}$ , а 1.1% – атомы тяжелого изотопа  $^{13}\text{C}$ . Для веществ с небольшим числом атомов углерода, доля «тяжелых» молекул (то есть, содержащих хотя бы один атом  $^{13}\text{C}$  в своем составе) невелика, но с ростом числа атомов углерода в молекуле она возрастает, и для таких полимеров, как белки и ДНК, «тяжелые» молекулы становятся преобладающими.

1. Определите число звеньев  $n$  для природного полимера – полиглицина  $\text{Gly}_n$ , если известно, что доля его молекул, не содержащих  $^{13}\text{C}$ , равна  $P = 80\%$ , а одно звено содержит два атома углерода.
2. Рассчитайте, чему для этого значения  $n$  равна доля молекул  $\text{Gly}_n$ , в которых содержится ровно один атом  $^{13}\text{C}$ ?

### Решение

#### 1. (3 балла)

Доля молекул  $\text{Gly}_n$ , не содержащих  $^{13}\text{C}$ , равна вероятности того, что все  $2n$  атомов углерода являются легкими изотопами  $^{12}\text{C}$ . Поскольку вероятность того, произвольный атом углерода окажется «легким», равна 98.9%, то вероятность того, что молекула  $\text{Gly}_n$  состоит только из них, равна  $P_{2n} = (0.989)^{2n}$ .

Тогда, по условию,

$$n = 0.5 \log_{0.989} P_{2n} = 0.5 \log_{0.989} 0.8 = 10.08 \approx 10.$$

#### 2. (3 балла)

В свою очередь, доля молекул  $\text{Gly}_n$ , содержащих один атом углерода  $^{13}\text{C}$ , составляет  $P_{2n-1} = (0.989)^{2n-1} \cdot 0.011 \cdot 2n$ , поскольку этот атом может равновероятно находиться в одном из  $2n$  положений в молекуле  $\text{Gly}_n$ :

$$P_{19} = (0.989)^{19} 0.011 \cdot 20 = 0.178.$$

Оценка снижалась за:

- арифметические ошибки;
- расчет доли «легких» звеньев в молекуле  $\text{Gly}_n$  вместо расчета доли «легких» молекул  $\text{Gly}_n$  среди молекул полимера равной длины (самая распространенная ошибка, максимальная потеря баллов);
- потерю множителя  $2n$  при расчете доли молекул  $\text{Gly}_n$ , содержащих один атом углерода  $^{13}\text{C}$ .

### Задача 6. Экзосомы (7 баллов)

В клетки эндотелия мыши генноинженерным способом был встроен ген химерного белка, объединяющий антитело к белку А и зеленый флуоресцентный белок (GFP). Химерный белок антиА+GFP заякоривается во внутреннем монослое плазматической мембраны клеток.

Известно, что клетки эндотелия могут образовывать экзосомы – наноразмерные везикулы, которые отпочковываются внутрь эндосом, формируя мультивезикулярное тельце, которое затем сливается с плазматической мембраной клетки, выбрасывая содержащиеся в нем экзосомы наружу.

1. Среду инкубации, содержащую экзосомы, добавили к фибробластам мыши, имеющим на внешней поверхности плазматической мембраны белок А. Будет ли наблюдаться флуоресценция фибробластов при освещении их синим светом (длина волны 473 нм)? Объясните ответ, опишите, какие события происходят и где локализован химерный белок антиА+GFP на всех этапах эксперимента.

### **Решение**

Синий свет может возбуждать флуоресценцию GFP. **(3 балла)**

*Развернутый ответ, в котором сказано, что данная длина волны света меньше, чем область поглощения GFP, и поэтому не может вызывать флуоресценцию, тоже считался правильным, хотя, скорее всего, длина волны 473 нм все-таки приводит к флуоресценции.*

Несмотря на то, что синий свет может возбуждать флуоресценцию GFP, флуоресценции фибробластов не будет, поскольку экзосомы не будут связываться поверхностью фибробластов. Химерный белок, расположенный на внутренней стороне плазматической мембраны, при отпочковывании эндосомы будет располагаться на ее поверхности. Затем, при образовании экзосом, они впячиваются внутрь эндосомы, и при этом химерный белок оказывается внутри экзосом. Экзосомы попадают во внеклеточную среду, которую вносят в культуры фибробластов, однако антитело к белку А не может связаться с белком А на поверхности фибробластов, т. к. экспонировано внутрь экзосом. Экзосомы не связываются с поверхностью клетки (или связываются, но в пренебрежимо малом количестве), химерный белок не попадает в фибробласты и не связывается с их поверхностью, и мы не можем наблюдать флуоресценцию GFP. *Правильным считался ответ, где упомянуто, в каком из монослоев находится химерный белок на каждом этапе формирования экзосом и в самих экзосомах.* **(4 балла)**

### **Задача 7. Благородные газы (7 баллов)**

Полый цилиндрический сосуд объемом  $V = 1.331$  л разделён жёсткой непроницаемой перегородкой, которая может перемещаться без трения вдоль оси. Полость слева от перегородки заполнили аргоном (Ar), а справа – гелием (He). Масса каждого газа равна  $m = 0.198$  г, температура  $T = 298$  К.

1. Определите объём полости  $V_{\text{Ar}}$ , заполненной аргоном, после установления в системе равновесия.
2. Рассчитайте давление гелия  $p_{\text{He}}$  после установления в системе равновесия.

### **Решение**

1. **(5 баллов)** После установления равновесия давления слева и справа от перегородки будут равны, значит можно, используя уравнение состояния идеального газа, записать первое равенство. Второе – связывает сумму с полным объемом:

$$\frac{\nu_{\text{He}}RT}{V_{\text{He}}} = \frac{\nu_{\text{Ar}}RT}{V_{\text{Ar}}}$$

$$V = V_{\text{He}} + V_{\text{Ar}}$$

Для объема аргона  $V_{\text{Ar}}$  получаем:

$$V_{\text{Ar}} = V \frac{\mu_{\text{He}}}{\mu_{\text{He}} + \mu_{\text{Ar}}} = 1.331 \frac{4}{4 + 40} = 0.121 \text{ л}$$

**(1 балл за условие равновесия ( $p_{\text{Ar}} = p_{\text{He}}$ ), 1 балл за количество гелия, 1 балл за количество аргона, 2 балла за объём аргона)**

Типичная ошибка – условием равновесия выбрано равенство объёмов, занимаемых газами.

2. **(2 балла)** Давление гелия:

$$p = \frac{\nu_{\text{He}}RT}{V_{\text{He}}} = \frac{mRT}{\mu_{\text{He}}(V - V_{\text{Ar}})} = \frac{0.198 \cdot 8.31 \cdot 298}{4 \cdot (1.331 - 0.121)} = 101300 \text{ Па}$$

### Задача 8. Популяции (8 баллов)

На планете X2345-L 10 тысяч лет назад из-за землетрясения возник перешеек между двумя континентами. В результате с материка Зея на материк Панацея переселилось около 20000 овцебыков (популяция А). Через год в результате второго землетрясения перешеек опустился ниже уровня моря, и популяция овцебыков была отрезана от основной популяции. В течение первых 10 лет наблюдался рост популяции до 160000 особей. Однако затем в результате резкого потепления и засухи на Панацее количество овцебыков сократилось до 1000 особей. Через 100 лет после этого события популяция овцебыков на Панацее насчитывала уже около 32 млн особей (популяция Б).

1. Какие из описанных факторов привели к резким изменениям численности популяции? Объясните.
2. Как вы считаете, вырос или сократился генофонд популяции, когда она стала насчитывать 32 млн особей (популяция Б), по сравнению с 20000 овцебыков, которые пересекли перешеек (популяция А)? Объясните.
3. Какая из этих двух популяций (А или Б) более устойчива к болезням? Объясните.
4. Изначально популяция овцебыков имела только один фенотип по цвету шерсти - серую окраску. Затем, уже на Панацее, появился второй фенотип овцебыков, у которых наблюдались большие неокрашенные области (выглядевшие как белые пятна), сформированные, главным образом, в области живота (белое пузико), кроме того, существуют неподтвержденные данные существования очень редкой особи – белого овцебыка. В популяции Б наблюдали 1000 овцебыков, из них только 1 был серо-белым, а остальные серые. Не было обнаружено значимых отличий в жизнеспособности овцебыков с разной окраской. Является ли данная популяция идеальной или очень близкой к ней? Ответ поясните.

## **Решение**

1. К **резкому** изменению численности привели **резкое** потепление и засуха. **(2 балла)**
2. В результате того, что популяция сократилась до 1000 особей, произошел так называемый эффект «бутылочного горлышка», который привел к резкому сокращению генофонда овцебыков по сравнению с генофондом овцебыков, изначально мигрировавших на Панацею. Генофонд популяции Б сократился по сравнению с генофондом популяции А (изначально переселившейся популяции). **(2 балла)**
3. Популяция овцебыков в 32 млн особей (популяция Б) менее устойчива к болезням, так как, несмотря на численность, ее генетическое разнообразие было сокращено, то есть снижена устойчивость популяции к болезням и внешним угрозам. **(2 балла)**
4. По условиям задачи этот ответ требует пояснения. Если предположить, что популяция овцебыков – идеальная, то есть изменение окраски можно описать соотношением Харди-Вайнберга, то за серую окраску и изменение ее распределения отвечает только один ген (или группа генов, действующих так, как будто он один). При этом существуют два аллеля:  $p$  – ответственный за нормальную серую окраску, и  $q$  – который вызывает нарушения этой окраски, причем  $p+q=1$ , а их распределение в популяции описывается как  $p^2+2pq+q^2=1$ . Можно предположить, что фенотипы серой и серо-белой окраски – это гомозиготы,  $p^2$  и  $q^2$ , тогда  $p+q=1$ ; в нашем случае  $p=0.9995$  (корень из 0.999), а  $q=0.032$  (корень из 0.001), таким образом сумма больше единицы, и гипотеза неверна.

Пусть тогда серая окраска – гомозигота, а серо-белая – гетерозигота, тогда  $p=0.9995$  (корень из 0.999), а  $q=1-p=0.0005$ , в этом случае можно считать белый фенотип реальным, просто очень редким (около  $0.25 \cdot 10^{-6}$ , то есть в 32 миллионной популяции всего 8 особей – неудивительно, что их не могут обнаружить). С такими числами можно считать, что популяция близка к идеальной (конечно, это неплохо подтвердить статистическими расчетами, но как правильно это сделать, вы узнаете в ВУЗе, и, надеюсь, что в нашем).

*За ответ без пояснения полный балл не ставится. (2 балла)*

## **Задача 9. Гаплогруппы (10 баллов)**

Гаплотип – это совокупность определенных участков ДНК на одной хромосоме, которые наследуются вместе. Для исследований в области генетической истории человечества обычно используют участки Y-хромосомы (Y-ДНК-гаплотип) и митохондриальной ДНК (мтДНК-гаплотип). Y-ДНК-гаплотип наследуется по отцовской линии и передается от отца к сыну в неизменном виде. мтДНК-гаплотип наследуется строго по материнской линии.

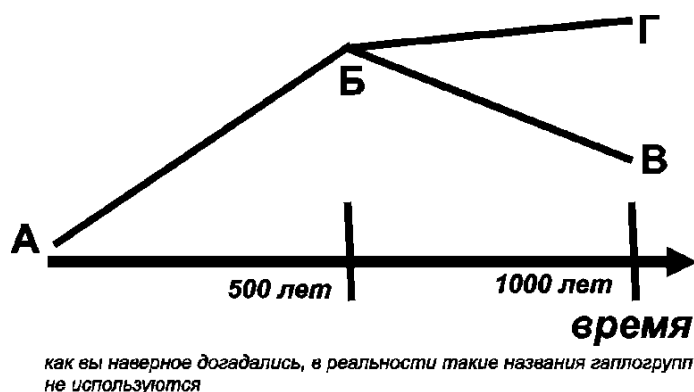
Гаплогруппа — группа гаплотипов, имеющих общего предка, у которого произошла мутация, унаследованная всеми потомками. Скорость накопления мутаций не очень велика, зависит от выбранных маркеров и постоянна. Соответственно, каждая новая гаплогруппа содержит мутации, появившиеся в гаплогруппах-предшественниках, т.е. у новых гаплогрупп больше мутаций. Заметим, что все основные гаплогруппы сформировались несколько тысяч лет назад, хотя появление новых мутаций регистрируется постоянно. Любопытно, что при



использовании стандартных правил маркировки названия Y-ДНК и мтДНК могут совпадать, хотя они используются для совершенно разных гаплогрупп.

Сопоставляя информацию о мутациях в гаплогруппах с археологическими исследованиями, можно получить информацию о миграциях человеческих популяций.

1. У мужчины с гаплогруппой R1a1a (Y-ДНК) и гаплогруппой N1A (мтДНК) и женщины с гаплогруппой R1a1a родились близнецы – мальчик и девочка. Что вы можете сказать о гаплогруппах их детей? Считаем, что у детей не возникло серьезных нарушений в гаплогруппах.
2. Средняя скорость мутации на гаплотип на поколение составляет 0.15. Рассчитайте количество пар нуклеотидов в гаплотипе, если скорость мутагенеза на поколение у этих особей составляла 1 мутацию на  $10^8$  пар нуклеотидов, а весь геном составляет  $3.2 \cdot 10^9$  пар нуклеотидов (напоминаем, что скорость накопления мутаций,  $\nu$ , определяется по формуле  $\nu = N/2t$ , где  $N$  - количество мутаций,  $t$  - время, прошедшее после расхождения).
3. Два гаплотипа различаются между собой на 3 мутации. Определите, сколько лет назад они разошлись от общего предка (длительность поколения – 25 лет, скорость мутации гаплотипа можно взять из предыдущей задачи).
4. Однажды на севере археологи обнаружили хорошо сохранившееся поселение, в котором было обнаружено большое количество непогребенных тел людей разных возрастов и пола. Независимая датировка показала, что это произошло около тысячи лет назад. Удалось получить ДНК этих людей. Она содержала гаплогруппу А (Y-ДНК) и гаплогруппу Д (мтДНК). Ученые также сделали тест на гаплогруппы в небольшом селении недалеко от мест раскопок и установили, что в поселке у жителей присутствуют гаплогруппы Г (Y-ДНК) и Д (мтДНК). Время расхождения гаплогрупп показано на рисунке.



Есть ли какая-то связь между жителями современного и раскопанного археологами поселков?

## Решение

В целом, вопросы этого задания довольно простые, однако недостаток времени и малознакомая тема значительно усложняют нахождение правильного ответа.

1. Гаплогруппа R1a1a, носителем которой является мужчина, маркирует генетическую информацию, находящуюся на Y хромосоме. Таким образом, передаться девочке(ам) это гаплогруппа не может, более того, у женщин Y-ДНК отсутствует. Гаплогруппы N1A и R1a1a (обнаруженной у женщины) маркируют митохондриальную ДНК, которая передается только от матери. Таким образом детям достанется гаплогруппа R1a1a (мтДНК). Значит у мальчика будут гаплогруппа R1a1a (Y-ДНК) и гаплогруппа R1a1a (мтДНК), а у девочки гаплогруппа R1a1a (мтДНК). То, что гаплогруппы, кодирующие Y-ДНК и мтДНК, имеют одинаковые названия, ни о чем не говорит, просто из-за особенностей маркировки гаплогрупп они могут иметь одинаковые названия (особенно если не писать их полное название).

***Правильно указанная гаплогруппа R1a1a (Y-ДНК) – 1 балл; правильно указанная гаплогруппа R1a1a (мтДНК) – 1 балл, максимум 2 балла.***

2. Скорости мутации на гаплотип и на 100000000 пар нуклеотидов должны совпадать, а величины различаются, потому что в гаплотипе другое количество нуклеотидов. Из имеющихся данных можно оценить количество пар нуклеотидов в гаплотипе, например, из пропорции  $(0.15 \cdot 100\,000\,000 / 1)$ . Величина гаплотипа будет составлять 15 000 000 пар нуклеотидов (в реальности, разумеется, цифры несколько другие).

***Правильное решение и ответ дают 2 балла.***

3. Рассчитаем количество лет, прошедших после разделения поколений по приведенной формуле:  $3 / (2 \cdot 0.15) = 10$  поколений, что соответствует  $25 \cdot 10 = 250$  лет.

***Правильное решение и ответ дают 2 балла.***

4. Данный вопрос не имеет четкого однозначного ответа и допускает различные варианты. Ответ будет засчитан, если он не противоречит современным научным представлениям. Тем не менее, опираясь на представленные данные, можно сделать некоторые выводы. Поскольку гаплогруппы мужчин, обнаруженных археологами, и жителей поселка полностью различаются (то что время между и гибелью поселка и настоящим временем, а также время расхождения гаплогрупп совпадают - случайность, гаплогруппы сформировались много тысяч лет назад), то можно утверждать, что мужское население в современном поселке никак не связано родственными отношениями с жителями разрушенного поселения (***за наличие такого обоснованного вывода в ответе можно получить до 2 баллов***). А вот наличие похожих мтДНК гаплогрупп у жителей погибшего и современного поселков может означать, что жители погибшего поселка являются предками или дальними родственниками по женской линии для жителей современного поселка (***наличие подобного заключения также дает возможность получить до 2 баллов***). Что произошло в разрушенном поселке: агрессивные пришельцы убили всех мужчин и практически забрали себе все имущество и женщин или разрушенное поселение заселили дальние родственники по женской линии, на основании существующих генетических данных установить нельзя. Это требует более глубокого изучения маркеров мтДНК (чтобы более точно установить связь носителей гаплогруппы Г у жителей современного и разрушенного поселков), а также изучения исторических и археологических источников для установления истины.

***Максимальная оценка за этот подвопрос – 4 балла.***

## Задача 10. Радиохирургия (12 баллов)

Одной из областей современной медицины является радиохирургия, то есть облучение высокой дозой излучения патологического участка с целью его деструкции без традиционного хирургического вмешательства. По типу используемого излучения различают две системы: Гамма-нож и Кибернож. Источником излучения в Гамма-ноже является  $^{60}\text{Co}$ , распадающийся с выделением  $\gamma$ -кванта (период полураспада  $^{60}\text{Co}$  равен  $T = 5.27$  лет, энергия  $\gamma$ -кванта равна  $W_\gamma = 1.33$  МэВ). Кибернож подразумевает облучение ускоренными электронами.

1. Сколько месяцев может проработать Гамма-нож без замены источников  $\gamma$ -излучения, если минимально допустимое содержание  $^{60}\text{Co}$  равно  $m = 21.21$  мг? Содержание  $^{60}\text{Co}$  в новом источнике равно  $M = 25.00$  мг.
2. Определите скорость электронов в Киберноже  $v$ , если ускоряющее напряжение равно  $U = 1.33$  МВ.
3. Рассчитайте длину волны  $\gamma$ -кванта в Гамма-ноже  $\lambda_\gamma$ , длину волны де Бройля электрона в Киберноже  $\lambda_e$  и найдите их отношение  $k = \lambda_\gamma/\lambda_e$ .

### Решение

1. **(3 балла)** Для ответа на этот вопрос следует использовать закон полураспада.

$$N(t) = N_0 2^{-\frac{t}{T}}$$

Отсюда выражаем время:

$$t = -T \log_2 \frac{m}{M} \approx 15 \text{ мес.}$$

*Типичная ошибка – предположение линейного уменьшения содержания радиоактивного элемента (решение через пропорцию, а не через закон радиоактивного распада).*

2. **(3 балла)** Электрон, ускоренный в таком поле, имеет кинетическую энергию  $W_k = eU = 1.33$  МэВ, сравнимую с энергией покоя

$$mc^2 = \frac{9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 1.33 \cdot 10^6}{1.6 \cdot 10^{-19}} = 5.1 \text{ МэВ.}$$

Поэтому следует пользоваться релятивистским выражением для кинетической энергии:

$$W_k = mc^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

Отсюда получаем выражение для скорости:

$$v = c \sqrt{1 - \left( \frac{mc^2}{W_k + mc^2} \right)^2} \approx 2.88 \cdot 10^8 \text{ м/с} \approx 0.96c$$

Типичная ошибка – расчёт без учёта релятивистской поправки (в таком случае скорость электрона получается больше скорости света, чего быть не может).

3. **(6 баллов)** Длину волны гамма кванта можно рассчитать по формуле:

$$\lambda_\gamma = \frac{hc}{W_\gamma} = \frac{6.6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1.33 \cdot 10^6 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}} = 9.3 \cdot 10^{-13} \text{ м} = 0.93 \text{ пм}$$

Длину волны де Бройля электрона рассчитываем по формуле:  $\lambda_e = \frac{h}{p}$ , где  $p$  – импульс электрона. Импульс найдем, используя выражение:

$$W_k + mc^2 = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

Откуда

$$p = \sqrt{\frac{W_k^2}{c^2} + 2mW_k}.$$

Окончательно:

$$\lambda_e = \frac{h}{\sqrt{\frac{W_k^2}{c^2} + 2mW_k}} = \frac{6.6 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{\frac{(1.33 \cdot 10^6 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19})^2}{(3 \cdot 10^8)^2} + 2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 1.33 \cdot 10^6 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}}} \approx 7.0 \cdot 10^{-13} \text{ м} = 0.70 \text{ пм}$$

**(2 балла за длину волны  $\gamma$ -кванта, 2 балла за длину волны де Бройля электрона, 2 балла за соотношение)**

Типичная ошибка – длина волны де Бройля электрона рассчитывалась так же, как для фотона (частицы с нулевой массой).

### Задача 11. Усеченный тетраэдр (14 баллов)

Рассмотрим такой фуллерен\*, что:

- многогранник **X**, отвечающий ему, имеет 2024 шестиугольных грани;
- центры пятиугольных граней **X** лежат в вершинах усеченного тетраэдра **Y**;
- общее число атомов углерода в этом фуллерене задается формулой  $N = 4n_1^2 - 8n_2^{2**}$ ;
- $n_1 + n_2 = 39$ .

1. Сколько пятиугольных граней в **X**? Чему равно общее число вершин **N** в **X**?
2. Каковы значения параметров  $n_1$  и  $n_2$ ?
3. Чему равны длины ребер (в нм) усекаемого и отсекаемых тетраэдров, формирующих **Y**? Считайте, что длина связи C–C составляет  $a = 0.14$  нм.

4. Оцените размер (в нм) внутренней полости фуллерена как максимальный диаметр сферы, которую можно разместить внутри **Y**. Обоснуйте, почему именно эта сфера является максимально возможной для **Y**. Размерами атомов углерода можно пренебречь.

\*Фуллерены – углеродные молекулы, имеющие форму выпуклого многогранника, состоящего из правильных пяти- и шестиугольников, в вершинах которого сходятся по три ребра.

\*\*Параметры  $n_1$  и  $n_2$  являются координатами двух отрезков на графеновом листе\*\*\*. Эти отрезки отвечают ребрам усекаемого и отсекаемых тетраэдров, формирующих **Y**, соответственно:  $[(n_1, 0) (n_2, 0)]$ . Опираясь на эти координаты, можно построить развертку **X** на листе графена.

\*\*\*

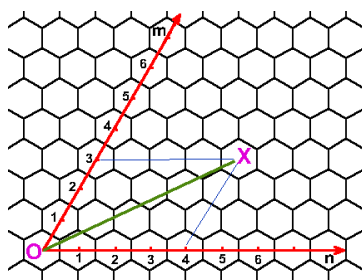


Рис. Взаимное расположение пары шестиугольников (их центры отмечены точками **O** и **X**) на графеновом листе описывается двумя целыми неотрицательными числами  $(n, m)$ , которые являются координатами центра одного из шестиугольников относительно центра другого в «скошенной» системе координат. На рисунке приведен пример для  $(4, 3)$ .

Вспомогательная информация:

Теорема Эйлера для выпуклого многогранника:

$$V - E + F = 2,$$

где **V**, **E**, **F** – это, соответственно, число вершин, ребер и граней многогранника.

## Решение

### 1. (3 балла)

Найдем общее число атомов в **X**, для этого воспользуемся теоремой Эйлера.

Общее число граней **X**:

$$F = F_5 + F_6$$

Общее число ребер **X**:

$$E = 1/2 \cdot (5F_5 + 6F_6)$$

Общее число вершин **X**:

$$V = 1/3 \cdot (5F_5 + 6F_6)$$

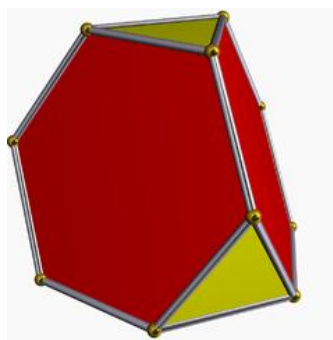
Тогда, подставляя в теорему Эйлера, получаем:

$$1/3 \cdot (5F_5 + 6F_6) - 1/2 \cdot (5F_5 + 6F_6) + F_5 + F_6 = 2$$

Упрощая, получаем общее уравнение, связывающее число граней разного типа:

$$F_5 = 12.$$

Второй подход: расчет числа пятиугольников через число вершин  $Y$  (см. рис) – 12. **(1 балл)**



Тогда общее число вершин:  $N = V = 1/3 \cdot (5 \cdot 12 + 6 \cdot 2024) = 4068$ . **(2 балла)**

2. **(4 балла)**

Теперь найдем значения индексов, для чего составим и решим систему уравнений: **(3 балла)**

$$\begin{aligned} 4068 &= 4n_1^2 - 8n_2^2 \\ 1017 &= n_1^2 - 2n_2^2 \end{aligned}$$

По условию,  $n_1 + n_2 = 39$ , тогда

$$\begin{aligned} 1017 &= (39 - n_2)^2 - 2n_2^2 \\ 1521 - 78n_2 + n_2^2 - 2n_2^2 - 1017 &= 0 \\ n_2^2 + 78n_2 - 504 &= 0 \\ D &= 78^2 + 2 \cdot 504 = 8100 \\ n_2 &= (-78 + \sqrt{8100})/2 = (-78 + 90)/2 = 6. \text{ **(0.5 балла)** } \\ n_1 &= 39 - 6 = 33. \text{ **(0.5 балла)** } \end{aligned}$$

3. **(3 балла)**

Найдем длину ребер для каждого из тетраэдров, большого и малого, как длину отрезка с координатами  $(n, 0)$ :  $L = n \cdot \sqrt{3}a$  **(1 балл)**, то есть, длина такого отрезка равна  $n$  длинам малых диагоналей углеродных шестиугольников.

Большой тетраэдр:  $L_1 = n_1 \cdot \sqrt{3}a = 33 \cdot 0.14 \cdot \sqrt{3} = 33 \cdot 0.14 \cdot 1.73 = 7.99$  нм. **(1 балл)**

Малый тетраэдр:  $L_2 = n_2 \cdot \sqrt{3}a = 6 \cdot 0.14 \cdot \sqrt{3} = 6 \cdot 0.14 \cdot 1.73 = 1.45$  нм. **(1 балл)**

4. **(4 балла)**

Рассчитаем высоту  $Y$  и сравним ее с диаметром сферы, вписанной в усекаемый тетраэдр:

$$H = \sqrt{\frac{2}{3}}(L_1 - L_2) = \sqrt{\frac{2}{3}}(7.99 - 1.45) = 5.34 \text{ нм}$$

Диаметр сферы, вписанной в усекаемый тетраэдр:

$$D = \frac{\sqrt{6}L_1}{6} = \frac{\sqrt{6} \cdot 7.99}{6} = 3.26 \text{ нм}$$

Поскольку  $3.26 < 5.34$ , следовательно, плоскости треугольных граней не пересекают сферу, вписанную в усекаемый тетраэдр, поэтому данная сфера является максимально возможной из тех, которые можно поместить во внутрь рассматриваемого усеченного тетраэдра  $Y$ .

Оценка снижалась за:

- арифметические ошибки;
- ошибки в порядках величин;
- рассмотрение усеченной треугольной пирамиды вместо усеченного тетраэдра при подсчете числа вершин  $Y$ , равного числу пятиугольников в  $X$  (простая проверка подстановкой полученных значений числа вершин, ребер и граней в теорему Эйлера для выпуклых многогранников покажет, что для 6 пятиугольников она не выполняется);
- ошибку в формуле расчета числа вершин (ребер) исходя из числа граней разных типов;
- нецелые значения величин индексов  $n_1$  и  $n_2$  либо значения, противоречащие условию  $n_1 + n_2 = 39$ ;
- ошибки в расчете длин диагоналей правильного шестиугольника исходя из длины его стороны;
- расчет диаметра вписанной сферы в приближении равенства площади поверхности усеченного тетраэдра и площади сферы (недопустимое приближение, сильно завышающее получаемую величину);
- отсутствие доказательства, что выбранная сфера является максимально возможной вписанной сферой.

## Задача 12. Керамика и смазочный материал (14 баллов)

Наноструктурированное вещество  $X$ , 10.0 г которого содержит  $2.91 \cdot 10^{24}$  электронов, используют для производства высокотемпературной керамики и высокотемпературных смазочных материалов. Для получения  $X$  высокотемпературному сжиганию подвергали смесь простого вещества  $Y$ , вещества  $Z$ , являющегося продуктом окисления  $Y$  концентрированной азотной кислотой, и реагента  $M$ , представляющего собой бинарное соединение. Вещества  $Y$ ,  $Z$  и  $M$  вступают в реакцию в мольном отношении 17:1:6. Известно, что  $M$  при нагревании в инертной атмосфере разлагается со взрывом, причем из 1.000 г  $M$  образуется 0.354 г натрия и 517 мл (н.у.) газа  $Z$ .

1. Установите формулы веществ  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  и  $M$ . Подтвердите расчетом.
2. Напишите уравнения трех реакций.

## Решение

1. Определим формулу вещества  $M$ .

$n(\text{Na}) = 0.354 / 23 = 0.0154$  моль, молярная масса  $M$  в расчёте на один натрий:  $1/0.0154 = 65$  г/моль, за вычетом натрия остаётся 42 г/моль, что соответствует трём азотам.

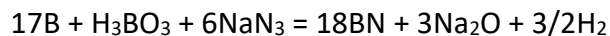
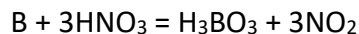
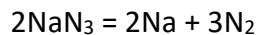
Таким образом,  $M$  – это азид натрия  $\text{NaN}_3$ , и  $Z$  – азот  $\text{N}_2$ .

$n(e) = 2.91 \cdot 10^{24} / (6.02 \cdot 10^{23}) = 4.834$  моль.

$$m(X) / n(e) = 10.0 / 4.834 = 2.07,$$

значит в составе **X** элементы малых периодов, для которых число протонов равно числу нейтронов. По описанию **X** и **Y**, с учетом наличия азота в **M**, находим **Y** – бор В, **X** – нитрид бора BN.

2. Уравнения реакций:



**Формулы M, X, Y и Z – по 2 балла**

**8 баллов**

**Уравнения трёх реакций по 2 балла**

**6 баллов**

### Список констант

Скорость света  $c = 3.0 \cdot 10^8$  м/с

Постоянная Планка  $h = 6.63 \cdot 10^{-34}$  Дж·с

Заряд электрона:  $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$  Кл,

Масса электрона:  $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$  кг

Масса нуклона:  $m_n = 1.7 \cdot 10^{-27}$  кг

Гравитационная постоянная  $G = 6.7 \cdot 10^{-11}$  м<sup>3</sup>/(кг·с<sup>2</sup>)

Универсальная газовая постоянная  $R = 8.3$  Дж/(моль·К)